Problemas Olímpicos

Soluções dos problemas do número anterior

1 Molécula contendo N átomos de massas m_1, m_2, m_3, ..., m_N, onde cada átomo está conectado ao seu vizinho por meio de ligações químicas que podem ser tratadas como molas que obedecem a lei de Hooke, com valores da constante de mola k_1, k_2, k_3, ..., k_N.

Seja x_1 o deslocamento da massa m_1, x_2 o deslocamento da massa m_2, ..., e x_N o deslocamento da massa m_N.

A equação de movimento é

Para a massa 1: $F_1 = -k_1(x_1 - x_2)$

Para a massa 2: $F_2 = -k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_2 - x_1)$

Para a massa 3: $F_3 = -k_3(x_3 - x_4) - k_2(x_3 - x_2)$

...

Para massa i-ésima: $F_i = -k_i(x_i - x_{i+1}) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1})$

Para a massa N: $F_N = -k_{N-1}(x_N - x_{N-1})$.

$$(1) + (2) + \ldots + (ith) + \ldots + (N) = \sum_{j=1}^{N} F_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} m\ddot{x}_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} m\dot{x}_j = \text{ costante}$$

ou seja, a equação acima descreve o movimento da molécula toda ao longo da direção longitudinal com velocidade constante. No caso a molécula esta em repouso e, portanto velocidade nula,

$$\sum_{j=1}^{N} m\dot{x}_j = 0 \Rightarrow m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots m_N x_N = 0.$$

2 Satélite esferóide de 1 m de raio que tem sua superfície coberta por uma mesma substância e exposto à radiação solar. O satélite está em órbita em torno da Terra, mas não na sombra da Terra. A radiação solar transfere energia térmica para o satélite até que a taxa de energia recebida pelo sol é a mesma taxa de energia térmica perdida pelo satélite.

a) Seja R_S o raio do Sol, r o raio do satélite esferóide, T_S a temperatura do Sol e T a temperatura do satélite.

A energia radiada pelo Sol em 1 s para o espaço é $4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$.

A uma distância R do centro do Sol, a densidade de energia por unidade de área é

$$I = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi R^2} = \left(\frac{R_S}{R}\right)^2 \sigma T_S^4.$$

A área efetiva do satélite que recebe a energia do Sol é a superfície voltada para ele. Para o esferóide esta área é πr^2. Portanto, a energia que o satélite recebe do Sol por unidade de tempo é $\left(\frac{R_S}{R}\right)^2 \sigma T^4 \pi r^2$.

Como a energia que o satélite irradia por unidade de tempo é $4\pi r^2 \sigma T^4$, no equilibrio $\left(\frac{R_S}{R}\right)^2 \sigma T_S^4 \pi r^2 = 4\pi r^2 \sigma T^4$. Substituindo os valores, resulta em $T = 289$ K.

b) Calculemos x que corresponde a $T = 1200$ K substituindo a formula $hf/k = 1200$ e $T = 6000$ K na formula $x = hf/kT$. Assim $x = 1200/6000 = 0.2$.

A energia total absorvida pelo satélite é

$$E_{ab} = \int_0^{x=0.2} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

A razão entre a energia absorvida e a energia total é

$$\frac{E_{ab}}{E_{total}} = \frac{\int_0^{x=0.2} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}.$$

Portanto, para x pequeno

$$\int_0^{x=0.2} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{x=0.2} x^2\, dx.$$

Assim $\frac{E_{ab}}{E_{total}} = 4.1x\ 10^{-4}$.

A energia solar absorvida pelo satélite é $\pi r^2 \left(\frac{R_S}{R}\right)^2 \sigma T^4\ 4.1x10^{-4}$, sendo T a temperatura do satélite na condição de equilíbrio. Finalmente substituindo os valores dados resulta $T = 40$ K.