Constante elástica de uma mola submetida ao próprio peso

Francisco Catelli
Departamento de Física, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS, Brasil.
E-mail: fcatelli@ucs.br

Alex Paulo Koltz
Escola de Ensino Médio do Centro Tecnológico da Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS, Brasil

Cada um dos anéis de uma mola espiral de encadernação é tratado como uma mola ideal, sem massa, associada a uma massa puntiforme. Com o auxílio da lei de Hooke é obtida uma expressão que permite o cálculo da constante elástica da mola a partir do seu comprimento na posição horizontal, de seu comprimento quando suspensa por uma das extremidades na posição vertical, e de seu peso. Os resultados experimentais, baseados nesta modelagem, diferem dos obtidos pela forma tradicional (suspendendo massas na extremidade inferior da mola) por menos de 2%. No contexto da sala de aula, esta atividade de baixo custo pode promover um maior envolvimento dos alunos com o assunto estudado, além de permitir uma bela associação entre uma lei física (a Lei de Hooke), aplicações simples da matemática e atividades exploratórias experimentais.

Lima *et al.* [1] sugerem uma variante do clássico experimento para a determinação da constante elástica de uma mola usando molas espirais de encadernação, de diâmetros idênticos, porém cortadas em comprimentos diferentes. Um estudante, ao executar o experimento sugerido, observou que tudo se passava como se fosse determinada a constante elástica de cada anel individualmente, associando-se depois um certo número destes anéis em série. Tal observação nos levou a desenvolver uma expressão que permite o cálculo da constante elástica de tais molas, distendidas apenas pela ação do próprio peso. Os resultados experimentais obtidos para duas molas de diâmetros diferentes mostram que a constante elástica calculada de forma convencional difere daquela obtida pelo modelo aqui desenvolvido por menos de 2%. As ferramentas matemáticas empregadas são simples, o que torna esta atividade adequada para o uso já a partir da física do nível médio.

Modelando a mola

O modelo é bastante simples: cada anel da mola é imaginado como a junção de um disco fino de massa m, munido de uma mola sem massa e de constante k^*, conforme a Fig. 1. A "mola" assim construída tem N discos e massa total $M = N \times m$.

Os anéis da mola, quando suspendida na vertical, apresentarão deformações cada vez menores, quando observados de cima para baixo. Isto se deve ao fato de que o primeiro anel é distendido pela ação da força peso dos outros $N - 1$ anéis abaixo dele; o segundo é distendido pela força peso dos $N - 2$ anéis abaixo dele, e assim sucessivamente, até o último anel.

Qual a relação entre a constante k da mola e a constante k^* de cada um dos N anéis? Consoante o modelo explicitado acima, a mola pode ser considerada como uma associação de N anéis idênticos, ou N molas, cada uma delas com constante k^* e massa M. Sabe-se que a constante da mola, nestas condições [2] é dada por

$$\frac{1}{k} = \frac{N}{k^*}. \tag{1}$$

Sabe-se também que a elongação do penúltimo anel, sob a ação do último, é dada, em módulo, por:

$$mg = k \times \Delta x, \tag{2}$$

expressão que nada mais é do que a mani-

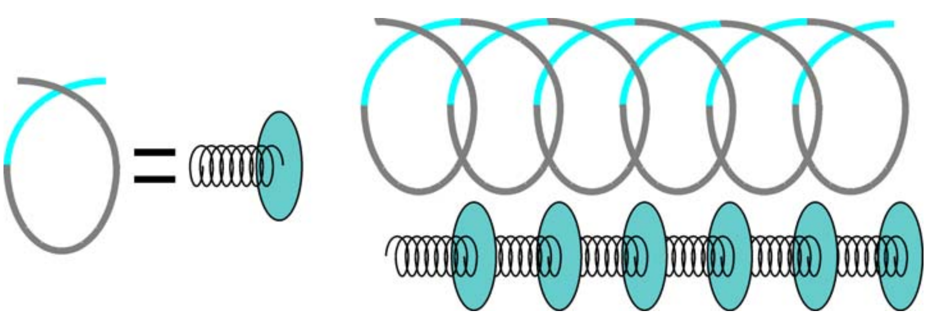

Figura 1. Cada anel da mola real é imaginado como sendo constituído de um disco fino, de massa m, justaposto a uma pequena mola ideal, de massa desprezível e de constante k^*. A massa total da mola (M) será então igual a $N \times m$, onde N é o número total de anéis.

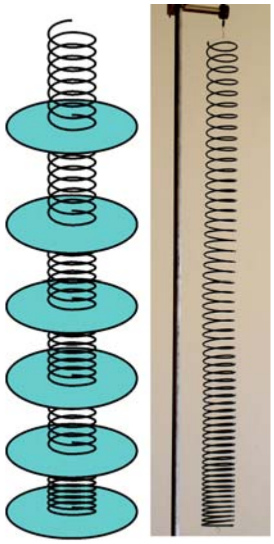

Figura 2. As molas inferiores do modelo (esquerda) apresentam elongações menores que as superiores; o mesmo ocorre com uma mola "real", neste caso, uma mola espiral de encadernação (direita).

festação direta da Lei de Hooke para um único anel. A elongação total da mola, quando submetida exclusivamente à ação de seu próprio peso, será então

$$\Delta x + 2\Delta x + 3\Delta x + \ldots + N\Delta x = \Delta x \sum_{n=1}^{n=N} n = \Delta L.$$

Por outro lado[1]

$$\sum_{n=1}^{n=N} n = \frac{N(N+1)}{2},$$

o que leva a

$$\Delta L = \frac{\Delta x(N+1)N}{2}. \tag{3}$$

Substituindo as Eqs. (1) e (3) na Eq. (2) e simplificando, chega-se a

$$k = \frac{N+1}{N}\frac{Mg}{2\Delta L}. \tag{4}$$

Note que a expressão (4) reduz-se à forma usual da lei de Hooke (Eq. (2)) quando N é igual a 1.

Entretanto, a "mola elementar", tal como definida acima, não precisa ser equivalente a um anel, ela poderia equivaler a meio anel, ou qualquer fração deste. Desta forma, para um número N arbitrariamente grande de molas elementares, o termo $(N + 1)/N$ tende a 1

$$k = \frac{Mg}{2\Delta L}. \tag{5}$$

Esta expressão mostra como calcular, a partir deste modelo simples, a constante elástica k da mola quando esta deforma exclusivamente sob a ação do próprio peso. Basta para isto conhecer a massa M da mola e a elongação ΔL a que esta é submetida e a aceleração da gravidade, g.

Tabela 1. Características das molas estudadas: número de anéis, comprimento inicial L_0 (medido com a mola não tensionada, na posição horizontal), diâmetro (Φ_m) dos anéis da mola, diâmetro (Φ_f) do fio, e massa total (M) da mola.

	N. anéis	L_o (±0,5 cm)	Φ_m (mm)	Φ_f (mm)	M (±0,02 g)
Mola 1	57,5	42	56,22	2,90	84,66
Mola 2	59	32	36,8	2,2	33,24

Teste experimental do modelo

A Eq. (5) é de fato bastante simples. Mas ela é corroborada pelo teste experimental? No caso de a resposta ser afirmativa, em quais condições? Para obter respostas a estas indagações, foi desenvolvido um pequeno projeto de investigação. Este consistiu basicamente na obtenção experimental da constante elástica k da mola através do método direto, ou seja, pendurando massas gradualmente maiores na mola e medindo a elongação correspondente. Um gráfico da força *vs.* elongação permite determinar se o comportamento da mola sob tensões crescentes é linear, pelo menos dentro do intervalo estudado. No caso de o requisito da linearidade ser satisfeito, a constante elástica da mola pode ser calculada e comparada com o valor obtido através da Eq. (5). Se estes dois valores forem iguais, dentro do erro experimental, o modelo estará então validado.

Os testes foram realizados com molas de espirais de encadernação, bastante comuns em centros de fotocópia. Foram testadas duas molas, com diâmetros diferentes (ver Fig. 3 e demais características de cada mola na Tabela 1).

Medida direta das constantes elásticas das molas por meio da lei de Hooke

A medida direta da constante elástica das molas foi efetuada suspendendo massas de 2 gramas e medindo a elongação através de um sensor de rotação (PASCO CI 6538, com polia de 50 mm de diâmetro), ajustado para a medida de deslocamentos, e uma polia de baixo atrito (ver Fig. 4). Para minimizar os efeitos de escorregamento do fio de tração em relação à polia, foi empregada uma técnica de montagem com duas polias, a qual pode ser visualizada na foto e no desenho da Fig. 4. Esta montagem tem a vantagem adicional de sempre manter a carga sobre a mola ao longo de sua direção axial. A resolução do sensor de rotação é de ($\pi \times 50$ mm)/1440 = 0,101 mm. Entretanto, no cálculo da incerteza na medida das elongações das molas foi tomado o valor de ±1 mm, tendo em vista que o sistema nem sempre retornava exatamente à posição original uma vez retirada a carga. Esta diferença para a posição original se revelou menor que ±1 mm em pelo menos duas dezenas de ciclos de carga-descarga das duas molas. O valor para a aceleração da gravidade foi tomado como sendo igual a (9,78 ± 0,01) m/s^2, tendo em vista a latitude e a altura em relação ao nível do mar do local onde foram realizadas as medições.

Os resultados podem ser visualizados no gráfico da Fig. 5; as constantes elásticas, obtidas através de ajuste pelo método dos mínimos quadrados dos dados experimentais da Tabela 2 aparecem na segunda coluna da Tabela 3. Levando em conta que se trata de molas de certo modo

Figura 3. Foto das molas empregadas nos ensaios descritos a seguir. Pequenos anéis confeccionados com fio de cobre bastante fino foram adicionados às duas extremidades das molas, de modo a fazer com que as cargas tivessem sempre a direção do eixo destas.

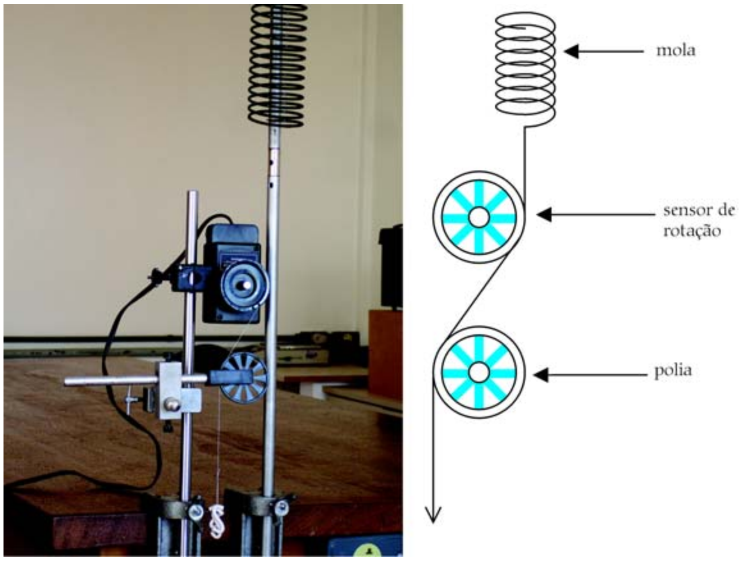

Figura 4. Dispositivo experimental para a obtenção das curvas de força *vs.* elongação. O fio conectado à mola é desviado pela polia de um sensor de rotação (*Rotatory Motion Sensor* PASCO® CI 6538) e em seguida, novamente desviado por uma polia de baixo atrito (*Smart Pulley* PASCO® ME 6838). O sensor de rotação, ajustado para a medida de deslocamentos, fornece, através de uma interface conectada ao computador, as elongações sofridas pela mola na medida em que massas gradualmente maiores são acrescentadas ao sistema.

improvisadas, a linearidade destas chega a ser surpreendente: os coeficientes de correlação são iguais ou melhores que 0,9998 para as duas molas, o que também atesta a qualidade do sistema experimental empregado na medição direta de k. As incertezas no cálculo destas constantes elásticas foram calculadas a partir dos seguintes dados: incerteza na massa: ±0,02 g relativa à massa de 2 gramas (o dobro da resolução da balança digital empregada na aferição); incerteza em Δx: ±0,1 cm (como explicado acima) e a incerteza em g: ±0,01 m/s², relativa à aceleração de 9,78 m/s².

Tabela 2. Elongações das molas 1 e 2. A força é a força peso, correspondente às massas de (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20) g, submetidas a uma aceleração da gravidade de 9,78 m/s².

Elongação (cm)		Força (mN)
mola 1	mola 2	
1,97	1,53	19,6
3,95	3,05	39,1
6,05	4,45	58,7
8,11	5,87	78,2
10,24	7,42	97,8
12,26	8,91	117,4
14,29	10,39	137,0
16,56	11,90	156,5
18,66	13,20	176,0
20,74	14,68	195,6

Medida das constantes elásticas por meio da Eq. (5)

A incerteza na medida de Δx desta vez é bem maior: ±0,5 cm para L_0, o comprimento da mola na horizontal, apoiada em uma superfície lisa, e também ±0,5 cm para o comprimento L da mola na vertical, submetida à ação do próprio peso. Assim, a incerteza para Δl ($L - L_0$), foi estimada em ±1 cm. As incertezas maiores devem-se ao fato de as molas em repouso não serem perfeitamente retilíneas,[2] além da dificuldade em medir com uma trena as molas distendidas sob a ação do próprio peso. A incerteza no valor da massa das molas foi novamente tomada como sendo o dobro da resolução da balança: ±0,02 g. Os resultados obtidos aparecem na terceira coluna da Tabela 3.

A comparação das constantes elásticas obtidas pela lei de Hooke e pela Eq. (5) mostra uma excelente concordância para as duas molas, validando assim o modelo proposto.

Este modelo mostra o que todo bom professor sempre soube: em vez de a matemática ser um "elemento complicador", ela pode tornar mais interessante o desenvolvimento das estratégias de sala de aula para ensinar física

Conclusões

Quando o modelo não se revela operacional? Em primeiro lugar, para que as medições sejam convincentes, convém que a elongação Δl da mola sob a ação do próprio peso seja grande, tipicamente de 30% ou mais em relação ao comprimento sem carga. Molas de menor diâmetro, quando submetidas ao próprio peso, produzem elongações muito pequenas, comparáveis às incertezas de medição. Uma maneira de contornar este problema seria acoplar duas ou três destas molas em série.

Também foram efetuados testes com molas plásticas, vendidas como brinquedo no comércio informal (as conhecidas "molas malucas"). Os resultados foram muito pouco convincentes, com diferenças que chegavam a 30% entre a constante obtida pelo método convencional e a obtida pela Eq. (5). As "molas malucas" são feitas de tal modo que os anéis ficam "colados" uns aos outros quando estas são colocadas na posição horizontal; esta "pré tensão" é a responsável pelos maus resultados obtidos. Este efeito não ocorre com as espirais de encadernação, tais como as empregadas neste trabalho, porque os anéis destas molas, quando colocadas em repouso na posição horizontal, não tocam uns nos outros, como pode ser visto na Fig. 3.

Matemática *vs.* física: este modelo mostra o que todo o bom professor sempre soube: em vez de a matemática ser um "elemento complicador", ela é fonte de beleza, e pode tornar mais interessante o desenvolvimento das estratégias de sala de aula para ensinar física. Desde que, é claro, sua "dose" não seja excessiva, o que certamente não é o caso deste trabalho.

O modelo é convincente: mesmo que

Tabela 3. Elongação (Δl) das molas penduradas na vertical e submetidas exclusivamente à ação do próprio peso. É apresentada também a constante elástica das molas, calculada através da lei de Hooke (segunda coluna) e através da Eq. (5) (3ª coluna).

	Δl (±1,0 cm) (Eq. (4))	k (mN/cm) (lei de Hooke)	k (mN/cm) (Eq. (5))
Mola 1	45	9.35 ± 0,6	9,2 ± 0,2
Mola 2	12	13,3 ± 1	13,5 ± 1

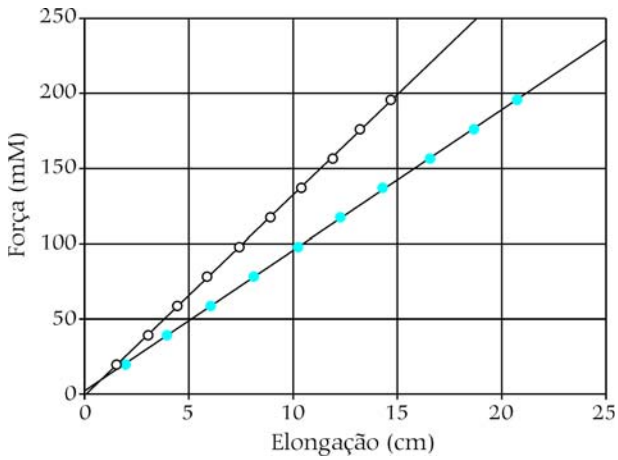

Figura 5. Força *vs.* elongação para as duas espirais de encadernação mostradas na Fig. 3. A mola 1 (ver também a Tabela 3) corresponde à linha de menor inclinação (círculos azuis); a mola 2 corresponde aos círculos brancos.

o professor não disponha de tempo para detalhar o aspecto da propagação das incertezas (o que seria deveras interessante, mas nem sempre há tempo disponível para isso), os resultados obtidos pelo método tradicional e pela Eq. (5) são convincentemente próximos, o que aponta na direção da validade do modelo.

Envolvimento dos alunos: pode ser bastante intenso. Por exemplo, enquanto alguns grupos de alunos medem a constante elástica através da lei de Hooke, outros grupos podem fazer o mesmo por meio da Eq. (5). A confrontação dos resultados poderá se dar logo a seguir, ocasião em que novas possibilidades de investigação podem ser discutidas. Por outro lado, o envolvimento pode ser ainda maior a partir da possibilidade de desenvolvimento de investigações paralelas. Perguntas muito curiosas podem ser avaliadas. Por exemplo, ao cortar alguns anéis de uma mola, ela fica "mais dura" ou "mais macia"? Molas feitas com o mesmo fio e com o mesmo número de anéis, porém de diâmetros diferentes, possuem a mesma constante elástica? Todas as molas têm sempre um comportamento linear? E assim por diante.

A dinâmica do experimento pode gerar grande envolvimento dos alunos: enquanto alguns medem a constante elástica através da lei de Hooke, outros podem fazer o mesmo teoricamente. A confrontação dos resultados poderá se dar logo a seguir, ocasião em que novas possibilidades de investigação podem ser discutidas

O custo do material: é muito baixo. Cada mola custa por volta de R$ 1,00. Os outros materiais adicionais também podem ser de baixo custo, pois apesar de ter sido usada neste trabalho a aquisição de dados por computador, isto não significa que ela seja indispensável, ao contrário. Nossa intenção com a aquisição de dados por computador foi a de chegar a incertezas as menores possíveis na determinação das constantes elásticas das molas, e assim validar de forma convincente o modelo. Entretanto, as elongações provocadas pela adição sucessiva de massas às molas poderão ser medidas com trenas ou réguas, com resultados bastante satisfatórios. Uma "dica" adicional: as massas podem ser improvisadas facilmente. Meça a massa de aproximadamente um metro de fio de cobre rígido, destes usados em instalações elétricas, bem como seu comprimento, o mais exatamente possível. Não é necessário retirar o isolamento elétrico. Um cálculo simples permitirá saber qual o comprimento de fio para o qual a massa será de - digamos - 2 gramas. A partir daí, basta cortar cuidadosamente vários pedaços de fio, todos com este comprimento. Estes, dobrados em forma de "S", são facilmente pendurados à mola, e uns aos outros. Os dados obtidos neste trabalho foram produzidos com massas produzidas desta maneira, e aferidas posteriormente em uma balança digital.

Finalmente, esta forma de trabalho, que alia pequenas doses de formalismo e investigação em laboratório, pode ser bastante motivadora. Os alunos acabam por se sentir essenciais para o sucesso das investigações. Algumas perguntas são brilhantemente respondidas, pelos alunos e (ou) pelo professor, outras o são apenas em parte, e para um terceiro grupo de perguntas, talvez não haja nenhuma resposta, pelo menos ao longo da investigação. Tudo isso educa muito os alunos (e o professor também) e poderá servir de motivação para algumas brilhantes carreiras na área das ciências exatas. Todo o professor se sentirá realizado e orgulhoso de sua missão quando isto acontecer.

Notas

[1]Nossa maneira predileta de "mostrar" aos estudantes como esta expressão se justifica é explanada assim: por exemplo, a soma (1 + 2 + 3 + 4 + 5) pode ser representada por quadrados, a primeira linha com um quadrado, a segunda com dois, etc.:

Agora, "ajuste" uma segunda coleção idêntica de quadrados, invertida, de modo a formar um retângulo. Para melhor visualização, a segunda coleção é representada por quadrados azuis. Assim, o número de quadrados total será igual à "base" deste retângulo, (5 + 1, ou N + 1), vezes sua "altura" (5, ou N); o número de quadrados brancos corresponderá à metade: $\frac{5\times(5+1)}{2} = 15$, ou, genericamente, $\sum_{n=1}^{n=N} n = \frac{N\times(N+1)}{2}$. (Para quem gosta de história da matemática, é interessante verificar como Gauss chegou a esta expressão, em sala de aula, ainda quando jovem).

[2]Para fazer com que o comprimento inicial das molas na posição horizontal não fosse afetado pelo fato de elas não serem perfeitamente lineares, estas foram colocadas sobre duas barras paralelas, como pode ser visto na Fig. 3.

Referências

[1] Fábio Menezes de Souza Lima, Gustavo Mulin Venceslau e Eliana dos Reis Nunes, The Physics Teacher **40**, 35 (2002).

[2] R. Resnick, David Halliday and Robert Krane, *Physics* (Willey, Nova Iorque, 1992), v. 1, 4ª ed, p. 336.