



Ondas de água: uma revisão ao nível médio

.....
Almir Guedes dos Santos

Colégio Estadual Marechal Zenóbio da
Costa, Nilópolis, RJ, Brasil

.....
Fernando de Souza Barros

Instituto de Física, Universidade
Federal do Rio de Janeiro, Rio de
Janeiro, RJ, Brasil

.....
Em uma abordagem elementar desse tema, a dificuldade principal é demonstrar a dependência da velocidade da onda com a espessura (ou perfil) do meio líquido. A descrição das propriedades de transporte de ondas de água quando seu comprimento de onda é comparável à espessura da lâmina de água, H , é normalmente iniciada a partir da expressão da velocidade de grupo v_g , denominada na literatura como “velocidade de uma onda gravitacional”

$$v_g = \sqrt{gH}. \quad (1)$$

A Eq. (1) requer atenção especial porque não é consequência direta de princípios simples ou intuitivos, e até sua denominação escapa a compreensão dos “não iniciados”. Entretanto, essa expressão é necessária porque é a chave para a explicação de fenômenos aparentemente bem diferentes. Por exemplo, a alta velocidade de uma onda tsunami em pleno mar (≈ 700 km/h), ou a elevação dessas ondas quando elas atingem o litoral (≈ 30 m!). Os principais objetivos da presente revisão são: (1) a caracterização do movimento local no interior do corpo de uma onda de água (ao nível quase-molecular); e (2) o efeito do perfil da lâmina de água sobre as propriedades de transporte das ondas.

Existe uma literatura abrangente e abundante sobre ondas de água, particularmente sobre o fenômeno das ondas tsunamis provocadas por terremotos submarinos. Na grande maioria são textos escritos em língua inglesa e que visam um público com conhecimentos de álgebra vetorial e mecânica dos fluidos. Um exemplo é o terceiro volume sobre ondas da série de física geral de Berkeley. Tratados de mecânica dos fluidos como, por exem-

plo, o texto de Granger [1] detalha as propriedades das ondas de água. O fenômeno das ondas tsunami foi descrito por autores brasileiros: Silveira e Varriale [2] examinaram o tsunami no contexto da propagação de ondas marítimas, e Helene e Yamashita [3] exploram um modelo numérico para descrever o comportamento da onda tsunami em função do perfil do fundo do mar. Entre os autores estrangeiros, o artigo de Margaritondo [4] foi concebido para um público não especializado com nível superior. Uma abordagem de ondas de água adaptável ao ensino médio é encontrada nos artigos de Behroozi e Podolefski [5, 6] e Behroozi [7].

Os fenômenos dramáticos da natureza relacionados com a água, como enchentes, avalanches e ondas gigantes, são temas fascinantes para aulas de ciências ao nível médio, com vistas ao ensino de conceitos elementares dos fluidos. As dificuldades para compreensão de um dos

Os fenômenos dramáticos da natureza relacionados com a água, como enchentes, avalanches e ondas gigantes, são temas fascinantes para aulas de ciências ao nível médio, com vistas ao ensino de conceitos elementares dos fluidos

fenômenos mais corriqueiros desse tópico, o movimento das ondas de água, reforçam a necessidade que a introdução desses conceitos ao nível elementar receba atenção especial. Entretanto, as conhecidas de-

monstrações de ondas de água em cubas ou aquários não revelam as propriedades dos movimentos internos no corpo da onda e têm diminuto impacto pedagógico, como já observou Richard Feynman nas suas recordações sobre as aulas de física da sua escola.¹

Caracterização das ondas de água²

O roteiro para apresentação das propriedades das ondas de água em uma sala de aula é uma lista complexa:

.....
A presente revisão é motivada pela carência de textos sobre as propriedades de ondas de água em física elementar. São abordados os tratamentos existentes na literatura para a descrição das propriedades básicas de ondas de água, dando-se preferência aos modelos simplificados do fenômeno da onda. A discussão sobre as propriedades das ondas é um complemento essencial para o aluno do ensino médio e quase um imperativo para o fomento de ações de preservação ecológica do nosso litoral. Torna-se assim necessário antecipar a demanda desse material educacional nas escolas brasileiras

(1) Ondas deslocando-se em águas ditas superficiais (espessura pequena da lâmina de água quando comparado com o comprimento de onda) têm uma característica “não trivial”: sua velocidade de propagação não depende do comprimento de onda.

(2) Quando a espessura da lâmina de água é bem maior do que o comprimento da onda líquida (águas profundas), as ondas têm amplitudes que dependem da direção: no limite de pequenas oscilações, a amplitude tem um comportamento harmônico na direção horizontal mas decresce exponencialmente com a profundidade.

(3) Em uma onda estacionária os movimentos locais das gotículas de água no interior do meio acompanham o movimento do perfil da onda, mas quando a onda se desloca, as gotículas de água superficiais descrevem círculos que se transformam em elipses no interior do meio aquoso.

Ondas de água gravitacionais

A ação das forças restauradoras depende criticamente da amplitude das ondas de água. Quando a amplitude das ondas está acima da escala de centímetros, predomina a força da gravidade e as ondas são denominadas gravitacionais. Nas ondas com amplitudes na escala de milímetros predomina a força da viscosidade e as ondas são denominadas capilares. Um tratamento simples de ondas de água requer várias simplificações: não se considera a tensão superficial da água, o que implica que a única força restauradora que atua na onda é a da gravidade. Embora a atuação da gravidade requeira ondas de amplitude na escala

Ondas deslocando-se em águas ditas superficiais (espessura pequena da lâmina de água quando comparado com o comprimento de onda) têm uma característica “não trivial”: sua velocidade de propagação não depende do comprimento de onda

acima de poucos centímetros, o regime considerado é de pequenas oscilações (a inexistência de bolhas de ar e de redemoinhos ou vórtices).

A maioria dos textos de física aborda a situação mais simples de uma onda sobre uma lâmina de água confinada, como mostra a Fig. 1 o perfil de uma onda líquida estacionária dentro de uma cuba. No estado de equilíbrio, o nível da água é a linha horizontal tracejada (eixo x). Na presença de uma onda, o líquido move-se periodicamente na direção vertical ao longo das paredes da cuba ($x = \pm L/2$). Nessas fronteiras, a limitação do movimento na direção x sugere que o máximo da amplitude Ψ_x corresponde ao nodo de Ψ_y .

Selecionando-se a opção de $\cos(kx)$

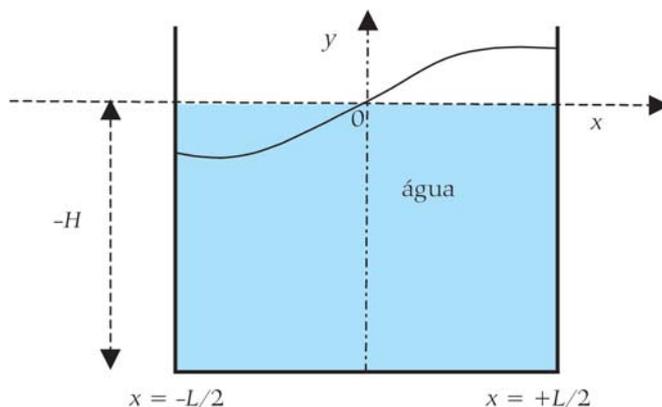


Figura 1 - Uma onda líquida com pequenas oscilações. Os dois graus de liberdade dos movimentos da onda nas direções principais estão em fase, mas as dependências temporais das suas componentes $\Psi_x(x, y, t)$ e $\Psi_y(x, y, t)$ são representáveis pela mesma função harmônica: no caso presente, $\cos(\omega t)$.

para Ψ_x implica em $\sin(kx)$ para Ψ_y . O fator comum às duas amplitudes $\cos(\omega t)$ modula o comportamento temporal dessas duas amplitudes (dois graus de liberdade em fase)

$$\Psi_y(x, y, t) = \cos(\omega t) \sin(kx). \quad (2)$$

$$\Psi_x(x, y, t) = \cos(\omega t) \cos(kx). \quad (3)$$

Uma introdução da onda gravitacional deve considerar seu comportamento no interior da lâmina de água. O efeito de profundidade permite uma análise informal porque suas conseqüências são intuitivas. É evidente que na base da cuba não

existe oscilações; a amplitude $\Psi_y(x, y, t)$ deve ser nula para $y = -H$. Em uma análise formal para $\lambda \approx H$, demonstra-se que existe uma atenuação exponencial da amplitude da onda em função da profundidade.

Alguns autores [5] argumentam que a hipótese de uma atenuação linear com a profundidade seja discutida em classe. Pode-se argüir que a atenuação seja exponencial, uma conseqüência do efeito cumulativo das camadas de líquido sobre a onda. Essas conside-

rações levam ao próximo ponto da presente análise. Como introduzir o conceito do movimento local das gotículas de água de uma onda?

Movimento local de gotículas no corpo de uma onda de água

A proposta mais simples seria que no interior do líquido a gotícula poderia se deslocar em qualquer direção, como no movimento browniano. Mas é intuitiva a previsão de movimentos solidários (coletivos) dessas gotículas. O próximo passo seria compatibilizar esses movimentos coletivos locais com a forma da onda gravitacional observada na cuba. Para isso, pode-se argüir que o perfil da onda superficial requereria trajetórias tangenciais das gotículas. A forma do perfil da onda seria compatível com movimentos circulares tangenciais das gotículas, logo abaixo da superfície. Seria útil a utilização de figuras sugestivas encontradas na internet (Fig. 2).³

O conceito de movimento local das gotículas de água é utilizado por vários autores [6, 7] no diagrama da Fig. 3 para montagem do perfil de uma onda gravitacional que se desloca na direção positiva do eixo x (uma onda gravitacional no sentido oposto teria movimentos locais de gotículas no sentido anti-horário).

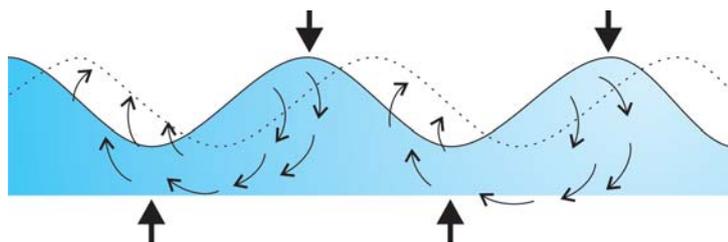


Figura 2 - O deslocamento horizontal Δx ao longo da extensão frontal L de uma onda líquida. Em Δx , a seção da onda cresce de uma quantidade $L \Delta y$.

As propriedades de transporte são formalmente determinadas através das relações de dispersão que expressam as dependências dos parâmetros do perfil das ondas (amplitude e comprimento de onda) com sua frequência angular ω . Essas relações dependem das forças restauradoras (a força gravitacional). Para pequenas oscilações, a força restauradora por unidade de comprimento e unidade de massa é proporcional a ω^2 , um resultado geral para ondas harmônicas.

Na Tabela 1, retirada do texto sobre ondas da série de Berkeley, estão relacionadas às relações de dispersões e velocidades da onda de água nos limites identificados. Como mostra a tabela, as ondas em águas profundas são dispersivas (depende do comprimento de λ), enquanto em águas rasas não existe dispersão.

Pelas estruturas das expressões da Tabela 1 é razoável prever que suas demonstrações não seriam compatíveis com os conhecimentos de alunos do nível médio. Entretanto, como sugerido na introdução, a expressão da velocidade da onda em águas rasas é de especial importância para caracterizar o comportamento de transporte das ondas em função do perfil da lâmina de água, e merece uma discussão em sala de aula. Exemplificam-se a seguir as propostas de alguns autores da derivação desta equação a partir de conceitos básicos de física e de cálculo.

Como comentado acima, Behroozi e Podolefsky [5, 6] demonstraram a expressão da velocidade da onda em águas rasas no limite de pequenas amplitudes, $A k \ll 1$, onde A é a amplitude da onda e k seu número de onda, para derivar a expressão da velocidade da onda. Essa demonstração utiliza funções trigonométricas e utiliza um esquema para montagem de uma onda gravitacional progressiva (ver Fig. 3) didaticamente relevante para um enfoque elementar do fenômeno. A demonstração de Margaritondo [4] utiliza o intercâmbio entre energia potencial e cinética de uma onda gravitacional progressiva para demonstrar a dependência de velocidade da onda com o perfil da lâmina de água. Entretanto, o formalismo utilizado de funções harmônicas novamente a desaconselha em uma primeira apresentação do tema.

Tabela 1 - Relações de dispersão nos limites de águas profundas ($H \gg \lambda$) e de águas rasas (H pequeno). A tabela também relaciona as expressões das velocidades da onda nos dois regimes.

Lâmina	Relação de dispersão	Velocidade (m/s)
Águas profundas	$\omega^2 = 6,6 \lambda^{-1}$	$v_g = 7,85 \lambda^{-1/2}$
Águas rasas	$\omega^2 = 387 H \lambda^{-2}$	$v_g = 3,13 H^{1/2}$

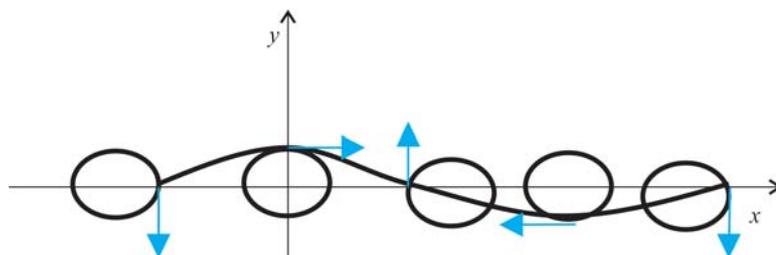


Figura 3 - Ilustração utilizada por Margaritondo [4] para demonstrar a dependência da velocidade de uma onda gravitacional com o perfil da lâmina de água, no limite de águas rasas ($H \approx \lambda$).

Uma possível adaptação da demonstração de Margaritondo é sugerida a seguir. No esquema da Fig. 4, o perfil da onda é representado na forma de um telhado formado por semi-cilindros de raio de curvatura R . Repetindo o argumento de Margaritondo com esses perfis cilíndricos, obtêm-se a expressão abaixo, numericamente incorreta mas com a dependência funcional desejada

$$v_g = \sqrt{2gR}. \quad (4)$$

O último conceito necessário para uma introdução de ondas de água, com densidade ρ , é a dependência da energia transportada com o quadrado da amplitude da onda, A

$$E = \frac{1}{8} \rho g A^2. \quad (5)$$

Uma verificação por análise dimensional seria um bom ponto de partida. Poder-se-ia lembrado que a energia eletrostática de um capacitor carregado é proporcional ao quadrado do campo elétrico no seu interior.

Conclusões

A presente revisão foi motivada pela carência de textos apropriados sobre as

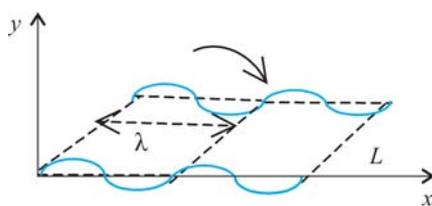


Figura 4 - Esquema simplificado de ondas com perfil semi-cilíndrico.

propriedades de ondas de água em física elementar. Trata-se de uma surpreendente omissão de um fenômeno tão corriqueiro em qualquer extensão natural de águas (lagos, rios e costas marítimas). A beleza das ondas de água, principalmente das ondas do mar, é exaustivamente explorada em desenhos, fotografias, em contradição à carência de textos ou artigos que abordem o tema utilizando conceitos elementares de física. Existem boas razões para a impopularidade desse tema. Como tentamos mostrar, o movimento local do fluido no interior das ondas não é intuitivo e sua visualização através de experimentos simples é um desafio especial.

Notas

¹Feynman descreve no texto *The Character of Physical Law* (Editora MIT, Cambridge, 1965), chap 6, as tentativas infrutíferas do seu professor no 2º grau ao tentar utilizar um tanque de ondas, inundando a mesa e transformando a aula em um "show aquático"!

²A conceituação básica de ondas de água apresentada nessa seção acompanha o roteiro do texto sobre "Ondas" do curso de física de Berkeley.

³HTTP://kingfish.coastal.edu/biolgy/sgilman/770Oceansinmotion.htm.

Referências

- [1] Robert Granger, *Fluid Mechanics* (Dover, Nova York, 1985).
- [2] F.L. Silveira e M.C. Varriale, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **22**, 190 (2005).
- [3] O. Helene. e M.T. Yamashita, *European Journal of Physics* **27**, 855 (2006).
- [4] G. Margaritondo, *European Journal of Physics* **26**, 401 (2005).
- [5] F. Behroozi e N. Podolefsky, *European Journal of Physics* **22**, 225 (2001).
- [6] F. Behroozi e N. Podolefsky, *European Journal of Physics* **22**, 587 (2001).
- [7] F.Behroozi, *European Journal of Physics* **25**, 115 (2004).