

**E**xplorar conceitos de simetria é sempre uma tarefa incomum, embora ela esteja presente em muitas situações de interesse, criando padrões que nos auxiliam no conceito de organização. Já a partir do nível básico de formação, essa ferramenta muitas vezes vem a desempenhar papel importante na solução de problemas o que a torna indispensável no desenvolvimento de aprendizados. Isso está em conformidade com os estudos sobre aprendizagem que têm costumeiramente expressado a necessidade da introdução de simetrias e suas propriedades como uma parte da grade curricular básica. Dessa forma, estar apto a identificar linhas de simetria, congruências e formas similares é um desafio que campos da mente humana tendem a incorporar, e visando esse propósito, apresentamos a aplicação da solu-

ção de um problema simples: encontrar as resistências equivalentes entre resistores iguais em arranjos de configurações cúbicas (3D) e os mesmos circuitos expostos em arranjos em formas planas (2D), explorando as situações simétricas entre as geometrias e verificando suas validades.

### Procedimentos

#### Arranjo hexagonal

Para resolvermos o problema envolvendo resistores conectados em uma geometria cúbica deve-se explorar a simetria do problema, e para isso o melhor a fazer é estudar um caso um pouco mais simples, o bidimensional, e depois sim passarmos para o caso tridimensional.

Seja então o caso de resistores iguais conectados na geometria como mostrado na Fig. 1.

.....  
**A.J. Mania**  
 Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, Brasil  
 E-mail: mania@uesc.br

.....  
**E. Mania**  
 Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil  
 .....

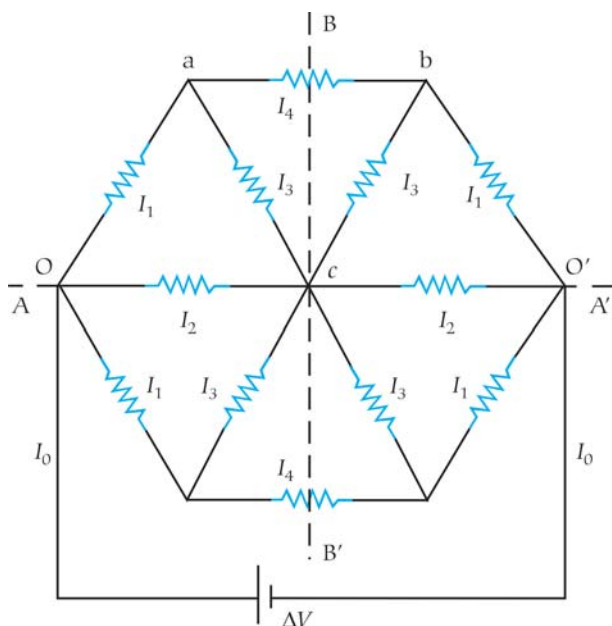


Figura1 - Arranjo hexagonal plano.

Neste trabalho propomos o estudo de um arranjo tridimensional de resistências elétricas para explorar o uso da simetria como ferramenta de resolução de problemas. Dessa forma, medindo-se a resistência equivalente em três casos distintos, fazemos a comparação com um circuito bidimensional equivalente, conseguido via análise da simetria distinta em cada caso.

O problema tem simetria quadrada, conforme pode-se ver pelas linhas tracejadas AA' e BB'. Então tudo que passa em um quadrante é válido para os demais. Assim, temos para o quadrante superior à esquerda, usando a lei das junções,

$$I_0 = 2I_1 + I_2, \quad (1)$$

e

$$I_1 = I_3 + I_4. \quad (2)$$

Usando agora a lei das malhas para o anel acba, obtém-se

$$R(I_4 - I_3 - I_3) = 0. \quad (3)$$

Também, usando a mesma lei para o anel OcbaO, temos que

$$R(-I_2 - I_3 + I_4 + I_1) = 0. \quad (4)$$

Assim, temos quatro equações e quatro incógnitas (que são as quatro correntes).

Dessas equações, tira-se que  $I_1 = 3I_3$ , e  $I_2 = 4I_3$ .

Usando a primeira equação das correntes, obtemos

$$I_3 = \frac{1}{10}I_0; \quad I_1 = \frac{3}{10}I_0; \quad I_4 = \frac{2}{10}I_0; \quad (5)$$

Precisamos agora de uma equação que envolva a tensão elétrica  $\Delta V$  e a corrente  $I_0$ , sendo a constante de proporcionalidade a resistência equivalente  $R_{eq}$ . Fazendo uma circulação pelo anel OabO' (passando pelo gerador), obtém-se facilmente  $\Delta V - R(I_1 + I_4 + I_1) = 0$ . Portanto,

$$R_{eq} = \frac{4}{5}R. \quad (6)$$

### Arranjo cúbico com voltagem nos vértices da face

Seja então uma associação de resistores na forma cúbica, com os resistores conectados ao longo de suas arestas. É desejado encontrar a resistência equivalente desta associação quando uma diferença de potencial (ddp)  $\Delta V$  é aplicada nas extremidades do circuito, conforme mostrado na Fig. 2a.

Deve ser notado que pela simetria do problema existem pontos da ligação que estão no mesmo potencial. Estes pontos estão assinalados pelas letras A, B e C. Assim, os pontos A estão a um certo potencial  $V_A$ , os pontos B a um certo potencial  $V_B$ , e os pontos C a um certo potencial  $V_C$ , sendo que estes valores podem diferir entre si. Essa associação pode ser melhor

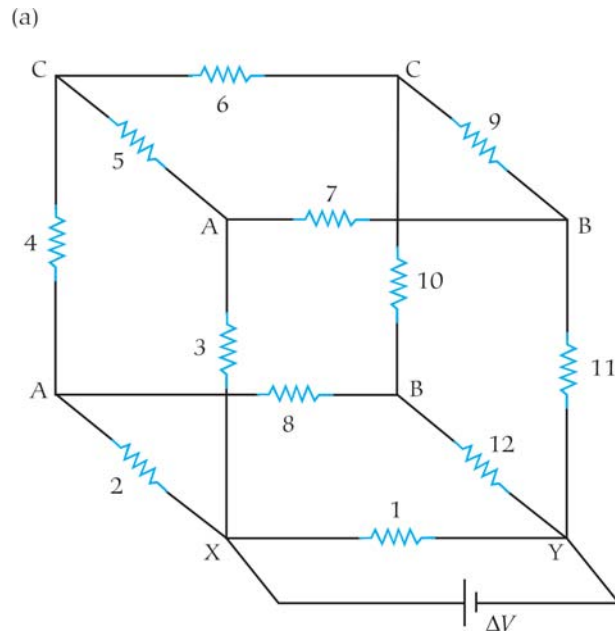


Figura 2a - Arranjo cúbico com a voltagem aplicada nas extremidades de uma face.

trabalhada se a esquematizarmos na forma alternativa mostrada na Fig. 2b. Assim, podemos explorar a simetria da parte superior das conexões mostradas pela linha tracejada OO'. Pela lei das junções, temos que no ponto Y'

$$I_0 = I_1 + I_2, \quad (7)$$

no ponto O,

$$I_2 = 2I_3, \quad (8)$$

e, no ponto a,

$$I_3 = I_4 + I_5. \quad (9)$$

Pela lei das malhas, fazendo a circulação no anel XOaa'O'YX, obtemos

$$\Delta V = R(2I_3 + I_4). \quad (10)$$

Fazendo a circulação no anel aa'b'ba,  $-R(I_4 - I_5 - 2I_5 - I_5) = 0$ , fornecendo

$$I_4 = 4I_5. \quad (11)$$

Da terceira equação das junções, tiramos que  $I_3 = (5/4)I_4$ , e, da primeira equação das circulações,  $\Delta V = (14/5)RI_3$ .

Usando a segunda equação das junções, tem-se  $\Delta V = (7/5)RI_2$ . Precisamos agora de uma equação que forneça  $\Delta V$  em função de  $I_0$  para termos a resistência equivalente. Fazendo a circulação XX'Y'YX, temos que

$$\Delta V - RI_1 = 0 \rightarrow \Delta V = RI_1, \quad (12)$$

e comparando estas duas últimas equações para  $\Delta V$ , tem-se que  $I_1 = (7/5)I_2$ . Usando a primeira equação das jun-

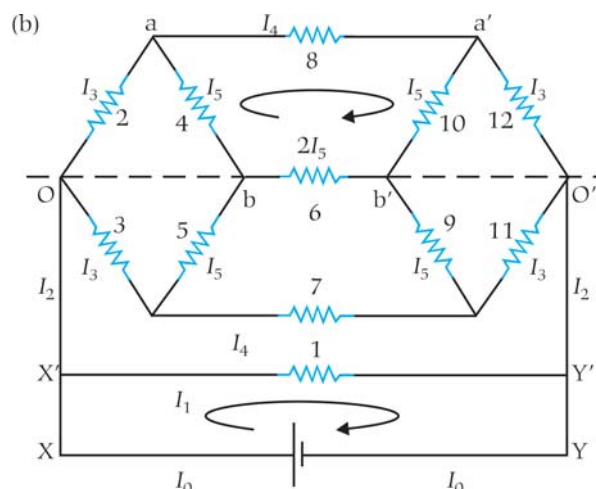


Figura 2b - Arranjo bidimensional equivalente ao circuito anterior tridimensional.

ções,

$$I_2 = \frac{5}{12} I_0 \quad (13)$$

tem-se, portanto, que

$$\Delta V = \frac{7}{12} R I_0 \rightarrow R_{eq} = \frac{7}{12} R. \quad (14)$$

### Arranjo cúbico com voltagem na diagonal da face

Seja agora a ddp aplicada nas extremidades do circuito, conforme mostrado na Fig. 3a.

Novamente, deve ser notado que pela simetria do problema existem pontos da ligação que estão no mesmo potencial. Estes pontos estão assinalados pelas letras A, B, C e D. Assim, os pontos A estão a um certo potencial  $V_A$ , os pontos B a um certo potencial  $V_B$ , os pontos C a um certo potencial  $V_C$  e os pontos D a um certo potencial  $V_D$  e estes valores podem ser iguais ou diferir entre si. Essa associação pode ser melhor trabalhada se a esquematizarmos na forma alternativa, conforme mostrada na Fig. 3b.

Dessa forma, podemos explorar a simetria das conexões mostradas pela linha tracejada  $OO'$  e  $AA'$ . Temos, por este esquema, e aplicando a lei das junções nos pontos b e c, respectivamente que

$$I_1 = I_4; \quad I_5 = I_6, \quad (15)$$

e

$$I_2 = 2I_5; \quad I_3 = 0; \quad I_0 = 2I_1 + I_2. \quad (16)$$

Pela lei das malhas, fazendo a circuição no anel XabcdX, obtém-se

$$-R(I_1 + I_3 - I_5 - I_2) = 0 \quad (I_3 = 0). \quad (17)$$

Substituindo  $I_5 = (1/2)I_2$ , tira-se  $I_1 = (3/2)I_2$ . Usando  $I_0 = 2I_1 + I_2$ , tem-se  $I_0 = (8/3)I_1$ , ou, ainda,  $I_1 = (3/8)I_0$ . Substituindo esta última na equação para  $\Delta V$ , tem-se uma equação que relaciona a ddp e a corrente  $I_0$ . A constante de proporcionalidade é a resistência equivalente procurada. Portanto,

$$\Delta V = \frac{3}{4} R I_0 \rightarrow R_{eq} = \frac{3}{4} R. \quad (18)$$

### Arranjo cúbico com voltagem na diagonal

Seja, por fim, a aplicação da ddp aplicada nas extremidades do circuito, conforme mostrado na Fig. 4a. Mais uma vez deve ser notado que pela simetria do problema existem pontos da ligação que estão

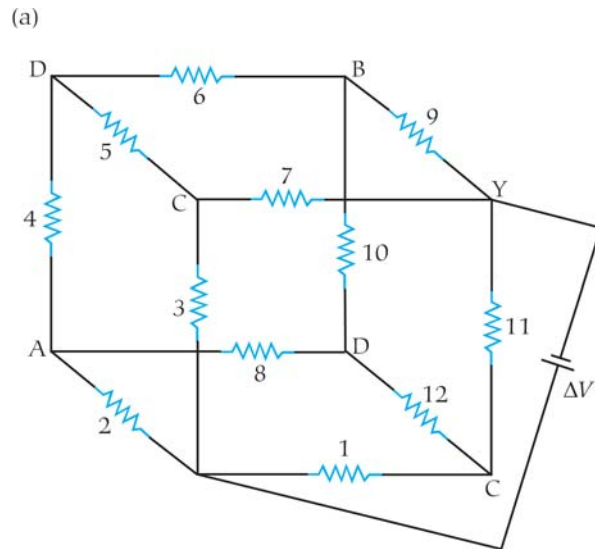


Figura 3a - Arranjo cúbico com a voltagem aplicada nas extremidades da diagonal de uma das faces.

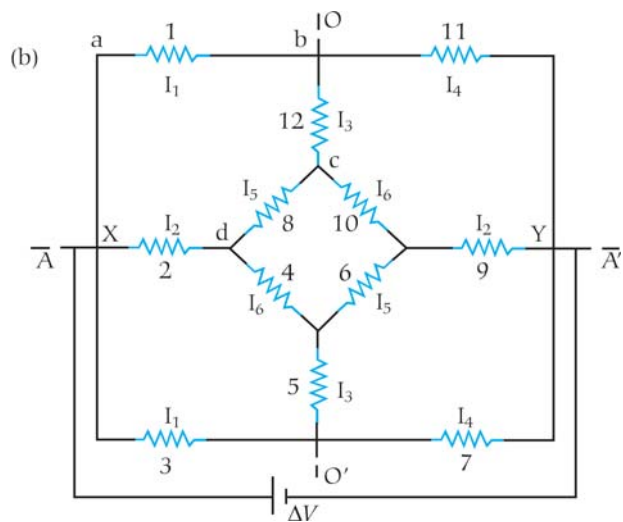


Figura 3b - Arranjo bidimensional equivalente ao circuito anterior tridimensional.

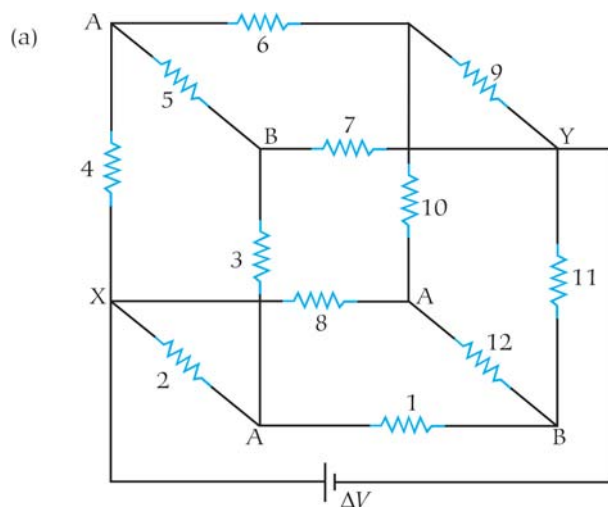


Figura 4a - Arranjo cúbico com a voltagem aplicada nas extremidades de sua diagonal.

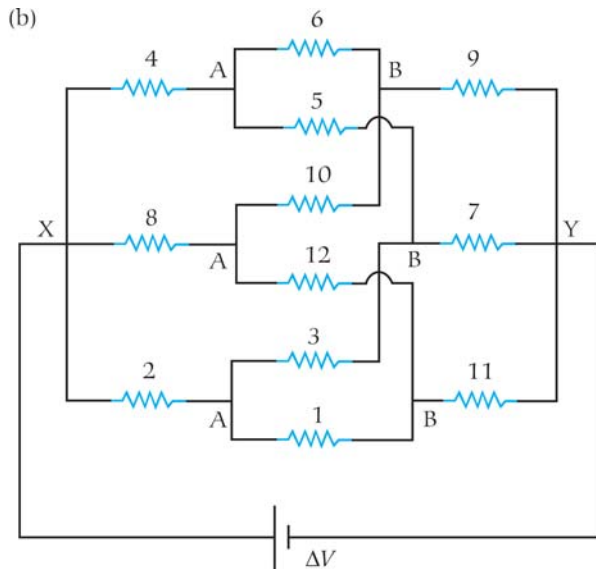


Figura 4b - Arranjo bidimensional equivalente ao circuito anterior tridimensional.

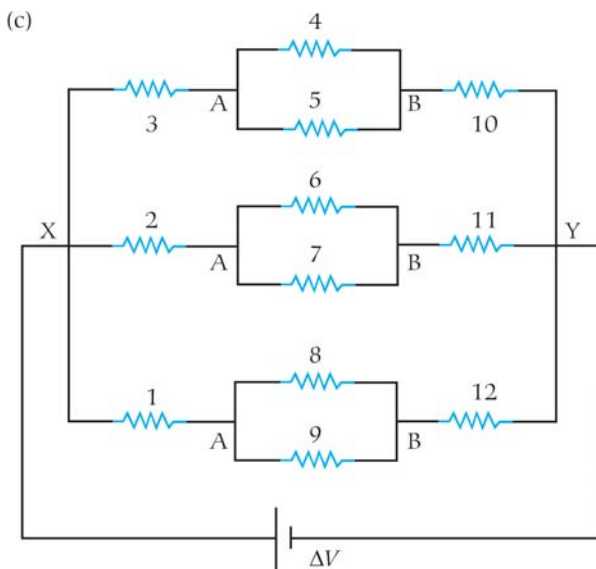


Figura 4c - Arranjo equivalente ao circuito anterior explorando o fato das resistências terem o mesmo valor.

no mesmo potencial. Estes pontos estão assinalados pelas letras A e B. Assim, os pontos A estão a um certo potencial  $V_A$  e os pontos B, embora possuam o mesmo potencial  $V_B$ , podem diferir de  $V_A$ . Essa associação pode ser melhor trabalhada se a esquematizarmos em uma forma alternativa, primeiramente como mostrada na Fig. 4b, e, explorando o fato específico de que todas as resistências têm o mesmo valor, podemos deixar a configuração conforme mostrada na Fig. 4c.

Assim, podemos explorar a simetria das conexões e sem dificuldades encontrar a resistência equivalente para este caso,

$$R_{eq} = \frac{5}{6}R. \quad (19)$$

### Discussão

Deve ser notado que a configuração exibida na Fig. 4c é essencial para facilitar o cálculo da resistência equivalente, e só é

possível de ser obtida devido ao fato dos potenciais  $V_A$  e  $V_B$ , nas junções A e B, respectivamente (mostradas com a nomenclatura para comparação com as junções da Fig. 4a), terem os mesmos valores (resistências iguais). Em outras situações, onde os valores das resistências sejam diferentes, não haverá simetria (potenciais nas junções não devem se manter constantes), não permitindo um rearranjo e a situação será de difícil resolução analítica. Cabe salientar também que é uma tarefa fácil e de baixo custo montar os circuitos elétricos, conforme exibidos nas figuras anteriores, onde o valor da resistência deve ser avaliada de acordo com o código de identificação de cores padronizadas. Isso feito, busca-se, por meio dessas atividades, permitir que o estudante do ensino médio tenha um exemplo de como a simetria ocorre e visualize e entenda a aplicação desta ferramenta na solução de problemas que eventualmente aparentam ser de difícil tratamento. Propomos então ao professor que submeta aos estudantes os arranjos de resistências em 3D e por intermédio de sugestões, que os alunos venham a explorar as simetrias do problema, montando assim os circuitos em 2D equivalentes, tornando sua resolução mais fácil.

### Saiba mais

- M.H. Nussenzweig, *Física Básica*. (Edgard Blucker, São Paulo, 1981), v. 2.
- S. Zbar, *Basic Electricity: A Text-Lab Manual* (McGraw-Hill, Nova York, 1997), 6ª ed.
- D. Giancolli, *Physics* (Prentice Hall, New Jersey, 1998), 5ª ed.
- R. Preston, *Experiments in Physics - A Laboratory Manual* (John Wiley, Nova York, 1985).
- M. Alonso e E.J. Finn, *Física* (Edgard Blucker, São Paulo, 1992), v. 2.
- P. Fishbane, *Physics for Scientists and Engineers* (Prentice Hall, New Jersey, 1996), 2ª ed.
- W. Beuche, *College Physics* (McGraw-Hill, Nova York, 1998).