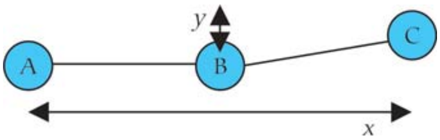
Problemas Olímpicos

Soluções dos problemas do número anterior

1 Cálculo da carga unitária de um sistema com três moedas idênticas de massa m conectadas por duas cordas leves e não condutoras. Sejam A, B e C cada uma das moedas, e x e y as distâncias como mostrado no diagrama.



A energia potencial total desse sistema é $U = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC}$. Como as distâncias entre A e B e entre B e C são fixas, $U_{AB} = U_{BC}$ = constante. Por outro lado

$$U_{AC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{\sqrt{d^2 - y^2}}.$$

Para pequenos deslocamentos podemos usar a expansão $(1 + z)a \approx 1 + az$, e então

$$U_{AC} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2d}\left(1 + \frac{y^2}{2d^2}\right).$$

Como o centro de massa não se move, a moeda B moverá $y_B = 2y/3$, enquanto as outras duas irão se mover de $y/3$ na outra direção. A variação na energia potencial total como função do deslocamento y_B é

$$\Delta U \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{9Q^2}{8d^3}\right)y_B^2.$$

Se a moeda B move-se verticalmente para cima com velocidade v_B devido a conservação do momento linear, as moedas A e C mover-se-ão em sentido oposto com velocidades $v_B/2$ cada uma. Assim, para pequenos deslocamentos, e desprezando a componente horizontal das velocidades das moedas, a energia cinética será dada por

$$K \approx \frac{1}{2}mv_B^2 + 2.\frac{1}{2}m(v_B/2)^2 = \frac{1}{2}(3m/2)v_B^2.$$

Nesse caso, o sistema comporta-se como um sistema unidimensional de massa efetiva $m_{efet.} \sim 3m/2$ e constante de mola

$$k_{mola} \approx \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{9Q^2}{8d^3}\right).$$

Desta forma, o período do movimento é $T = 2\pi\sqrt{k_{mola}/m_{efet.}}$, resultando portanto para a carga de cada moeda

$$Q \approx \frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{md^3/3}{1/(4\pi\varepsilon_0)}}.$$

2 Temperatura das superfícies de uma placa. A placa é aquecida devido a absorção da luz solar pela superfície superior de área A. Suponha que o Sol esteja a pino. A taxa de energia de absorção pela placa é $P_{abs} = eIA$, onde a constante solar é I = 1350 W/m^2, e é a emissividade da placa de metal opaca que é igual a absorvidade, $\alpha = 1 - \rho$, sendo ρ a refletividade média sobre todo o espectro solar. A idéia deste problema é utilizar conhecimentos da lei de resfriamento de Newton e da condutividade térmica do material, sem entrar em qualquer tipo de modelo detalhado para a placa. Assim, a taxa de perda de energia de cada superfície da placa é $P_{perda} = cA(T - T_0)$, sendo T a temperatura de cada superfície, c uma constante (que depende da constante de Boltzmann, emissividade, pressão atmosférica, etc.) e T_0 a temperatura ambiente. Quando a placa atinge o equilíbrio térmico, a taxa de energia ganha por absorção na superfície superior deve-se igualar a taxa de perda de energia através das duas superfícies, a de cima e a de baixo,

$$eIA = c\,A(T_{topo} - T_0) + c\,A(T_{baixo} - T_0)$$

$$\Rightarrow T_{medio} = \frac{1}{2}(T_{topo} + T_{baixo}) = T_0 + \frac{eI}{2c} = cte,$$

ou seja, a temperatura média da placa é uma constante, independente da espessura da placa. Como a temperatura média da placa é 350 K para a primeira placa considerada, concluímos que a temperatura das duas superfícies estão relacionadas por

$$\frac{1}{2}(T_{topo} + T_{baixo}) = 350\,K \Rightarrow T_{topo} = 700 - T_{baixo},$$

qualquer que seja a espessura da placa. Considere agora a taxa de condução térmica da superfície superior para a inferior

$$P_{cond} = kA\frac{T_{topo} - T_{baixo}}{nd} = kA\frac{700 - 2T_{baixo}}{nd},$$

sendo k a condutividade térmica da placa e n = 1 para a primeira placa e n = 2 quando dobra-se sua espessura. Olhemos somente a superfície inferior; a equação acima descreve a taxa com que ela (a superfície inferior) ganha energia e que deve ser balanceada com a taxa de perda de energia para a vizinhança, ou seja,

$$kA\frac{700 - 2T_{baixo}}{nd} = c\,A(T_{baixo} - T_0).$$

Escrevendo esta equação para as duas espessuras, n = 1 e n = 2, e perfazendo o quociente delas, resulta

$$\frac{(700 - 2x340)/1}{(700 - 2T_{baixo})/2} = \frac{340 - 300}{T_{baixo} - 300}.$$

Sendo T_{baixo} a temperatura da superfície inferior da placa de espessura duas vezes maior. Resolvendo, resulta

$$T_{baixo} = 333.3\text{ K} \Rightarrow T_{topo} = 366.7\text{ K}.$$

3 Cálculo para não colisão de duas partículas de massa m e cargas iguais e de sinais opostos imersas em um campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$. Ao serem soltas, as cargas, devido a força de atração elétrica, adquirem uma velocidade v. Devido a presença do campo magnético, as cargas são então defletidas na direção y. Façamos a análise sobre a carga positiva, por simplicidade. Inicialmente a separação entre elas é L, e, portanto, cada uma estará localizada em $x_i = L/2$ e $y_i = 0$. Da 2ª lei de Newton, $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = m\mathbf{a}$. Em termos das componentes x e y (origem localizada no ponto médio da posição inicial das partículas), temos

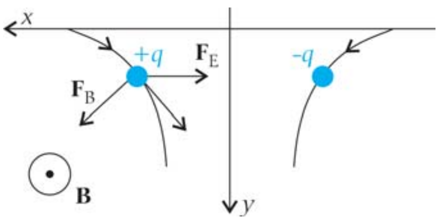
$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{kq^2}{4x^2} + qv_yB\,, \qquad (1)$$

e

$$m\frac{dv_y}{dt} = -qv_xB\,. \qquad (2)$$

Lembrando que $v_x = dx/dt$, a Eq. (2) pode ser integrada de $t = 0$ até qualquer tempo arbitrário t, resultando em

$$v_y = \frac{qB}{m}\left(\frac{L}{2} - x\right). \qquad (3)$$



Utilizando o teorema trabalho-energia

$$\int \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r} = \Delta K \;\Rightarrow\; -\int_{L/2}^{x} \frac{kq^2}{4x^2}dx = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

temos

$$v = \sqrt{\frac{kq^2}{2m}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{L}\right)}. \qquad (4)$$

Esta última expressão fornece a velocidade da partícula como função de sua posição x. Se as partículas não colidem, então haverá um ponto da trajetória aonde a partícula irá se mover somente na direção y, ou seja, $v = v_y$ para algum $x = x_f$. Substituindo a Eq. (3) na Eq. (4) e definindo as variáveis adimensionais $z = \frac{x_f}{x_i} = 2x_f/L$ e $z = \frac{x_f}{x_i} = 2x_f/L$ resulta em $z(1 - z) = 4c$. Como procuramos pelo menor L possível, significa o maior c possível (para um dado m, k e B). Assim, basta maximizar $f(z) = z(1 - z)$, ou seja, para $z = 1/2$, que retornando nas variáveis reais implica $c = 1/16$, ou $L = (16mk/B^2)^{1/3}$.

4 Cálculo de uma fonte de luz colocada em frente a um diamante. Sejam S a distância do objeto ao diamante, R o raio de curvatura do diamante, $2r$ a distância da imagem ao diamante e n o índice de refração do diamante ($n = 2.4$). Usando a aproximação simples para o raio paraxial,

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{2r} = \frac{n-1}{r}\,,$$

que resolvendo para s resulta $s = 5r$.

5 Cálculo da resistência em um circuito hexagonal infinito. Um método baseado na simetria e superposição para se achar a resistência efetiva entre dois nós de uma rede infinita quadrada de resistores foi proposto por Aitchison na Am. J. Phys. **32**, 566 (1964).

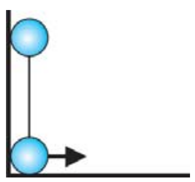
Aplicaremos aqui o mesmo método. Os nós adjacentes K e M são mantidos em uma diferença de potencial V. Esta situação física é vista como a superposição de duas outras configurações. Em uma configuração o ponto K é mantido em um potencial $V/2$ relativo a borda localizada no infinito. Uma corrente i flui para K e i se divide igualmente em três caminhos devido a simetria da rede e da regra dos nós de Kirchhoff. Em particular, uma corrente $i/3$ fluirá de K pra M. Na outra configuração, M é mantido a um potencial $V/2$ relativo a borda. Uma corrente i flui de M, e novamente, por simetria e a regra dos nós, uma corrente $i/3$ fluirá de K para M. A superposição dessas duas configurações fornecerá a corrente líquida $2i/3$ no ramo KM e uma diferença de potencial V entre eles. Pela lei de Ohm a queda de potencial através da resistência em KM será $(2i/3)R$. Da lei de Kirchhoff temos $V = 2i/3R$, e a resistência efetiva será então dada por $R_{KM} = V/i = 2R/3$. A resistência entre K e L é determinada da mesma maneira. Se K for mantido a um potencial $V/2$, a corrente i se dividirá em três. A corrente $i/3$ em KM irá então se dividir em duas, resultando para a corrente em KL $i/6$. Mantendo L em $-V/2$, introduzimos uma corrente $i/3$ em ML (de M para L) e $i/6$ em KM. A superposição das correntes $i/3 + i/6 = i/2$ em KM que é a mesma em KL. Assim, $V = i_{MK}R + i_{ML}R = iR$, e a resistência efetiva será $R_{KL} = R = 10\,\Omega$.

Envie sua solução dos problemas para djpr@df.ufscar.br. Não esqueça de incluir a sua Escola na mensagem. Se estiver correta, você se candidata a uma assinatura gratuita de Física na Escola, além de constar na Lista de Honra da seção Desafitos

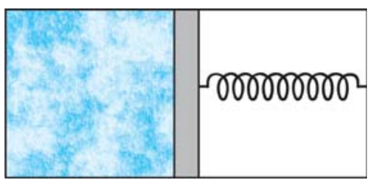
Novos problemas

Problemas extraídos do The Physics Teachers – Physics Challenge for Teachers and Students – 2002

1 Um haltere consiste em uma haste leve de comprimento r e duas pequenas massas m presas em suas extremidades. O haltere repousa verticalmente em um canto formado por dois planos sem atrito. Após o extremo inferior ter se movido ligeiramente para a direita, o haltere começa a escorregar. Determine a velocidade u da parte de baixo no momento em que a massa do topo perde contato com o plano vertical.



2 Um contêiner isolado é separado por um pistão que pode-se mover sem atrito.



A parte esquerda do contêiner está cheia com 1 mol de gás ideal monoatômico, e a parte direita contem vácuo. O pistão está conectado na parede direita do contêiner através de uma mola cujo comprimento relaxada é igual ao comprimento total do contêiner. Determine a capacidade térmica C do sistema, negligenciando a capacidade térmica do contêiner, pistão e mola.

3 Quais dos seguintes itens continuamente emitem radiação eletromagnética? a) uma lâmpada incandescente apagada, b) um radiador de calor ligado, c) uma forma de gelo. Explique.

4 É de consenso que uma casa pintada de branco é uma boa idéia nos dias quentes de verão porque a luz do sol é refletida para o exterior, fazendo com que o interior fique mais frio. Mas e durante o inverno? Será a casa pintada de branco uma boa idéia? Justifique.