Problemas Olímpicos

Soluções dos problemas do número anterior

1 Cálculo do trabalho entre duas partículas carregadas. Da mecânica temos, do teorema trabalho-energia, que para sistemas não-conservativos, $W_{conservativo} = -\Delta U$, e $W_{não\text{-}conservativo} = \Delta K + \Delta U$, sendo K e U as energias cinética e potencial do sistema, respectivamente. Assim, $W_{não\text{-}conservativo} = \Delta(K + U) = \Delta E$. No caso em questão, temos

$$\Delta U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

e

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2).$$

Usando ainda que

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

obtemos o resultado para o trabalho,

$$W = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

2 Cálculo de pressão e temperatura em vários estados de um motor de combustão. Para qualquer ponto do ciclo vale a equação de estados: $PV = RT$. Para um processo adiabático, $P_a V_a^\gamma = P_b V_b^\gamma$, ou em termos da temperatura, $T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$.

Desta forma basta ir substituindo os valores, resultando:

Estado	1	2	3	4
P (atm)	1	23.37	46.74	2
T (K)	300	738	1476	599.7

3 Luz branca incidindo em um filme fino de sabão. Do diagrama apresentado na figura, tiramos que

$$AB + BC = \frac{2d}{\cos\beta}.$$

O caminho óptico de A até C é

$$ABC = \frac{2d\,n}{\cos\beta},$$

e AC sen $\alpha = 2d$ tg β sen α (lembrar que o caminho óptico em um meio de índice de refração n é a distância vezes n).

Quando a luz viaja de um meio mais denso para outro menos denso, a luz refletida sofre uma mudança de fase de π, correspondendo a um caminho óptico de $\lambda/2$. A diferença no caminho óptico entre a luz refletida na superfície superior do filme de sabão e a luz refletida na superfície inferior do filme é

$$D = \frac{2d\,n}{\cos\beta} - 2d\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

A condição para que os dois raios sofram uma interferência construtiva é $D = (2m + 1)\lambda/2$, com m inteiro. Da lei de refração, sen $\alpha = n$ sen β; a mínima espessura ocorrerá para $m = 0$. Substituindo os valores fornecidos resulta que a espessura mínima do filme de sabão é

$d = 0.10\ \mu$m.

Soluções dos problemas do volume 3, número 2

1 A energia liberada por uma bomba atômica. O raio da "bola de fogo" em uma atmosfera de densidade ρ depende dessa densidade, do tempo t após a explosão e da energia E liberada pela bomba.

a) Usando análise dimensional e a expressão $E = \rho^x R^y t^z$, obtém-se $E = \rho R^5 t^{-2}$.

b) Abaixo, uma tabela típica de R em metros e t em mili-segundos, obtida da seqüência das fotos do problema.

t (ms)	0.24	0.38	0.52	0.66	0.80	0.94	1.08	1.22	1.36	1.50	1.65	1.79	1.83
R (m)	20.0	25.0	28.0	32.0	35.0	38.0	39.0	41.0	43.0	44.5	46.0	47.0	49.0
Log t	-3.32	-3.42	-3.28	-3.18	-3.10	-3.03	-2.97	-2.91	-2.87	-2.82	-2.78	-2.72	-2.70
Log R	1.30	1.40	1.45	1.51	1.54	1.58	1.59	1.61	1.63	1.65	1.66	1.67	1.69
5/2log R	3.25	3.49	3.62	3.76	3.86	2.95	3.98	4.03	4.08	4.13	4.15	4.18	4.23

c) Ao se distribuir os pontos em um papel log-log, uma reta deve ser obtida.

d) O ponto onde a reta corta o eixo log $t = 0$ vale 1/2 log (E/ρ), pois

$$5/2 \log R = 1/2 \log (E/\rho) + \log t.$$

Quando log $t = 0$, obtém-se, do gráfico, 1/2 log $(E/\rho) = 7{,}0$. Portanto, $E = 10^{14}$ J.

e) 1 ton TNT = $4{,}2 \times 10^9$ J. Logo $E = 10^{14}/4{,}3 \times 10^9 \sim 23.000$ ton TNT (~23 quilotons). A energia da bomba que explodiu em Hiroshima foi estimada como equivalente a cerca de 20 quilotons.

2 Um sistema estelar binário constituído por uma estrela ordinária de massa m_0 e raio R e uma estrela de nêutrons de massa M, girando em torno de um centro de massa comum.

a) Cálculo da distância da Terra ao sistema: a energia total irradiada por segundo é dada por $4\pi R^2 \sigma T^4$, onde σ é a constante de Stefan-Boltzman.

A energia incidente sobre uma unidade de área da Terra por segundo é

$$P = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi \ell^2},$$ o que dá $R = (P/\sigma T^4)^{1/2}\ell$.

A energia de um fóton é $hf = hc/\lambda$; A massa equivalente de um fóton é $h/c\lambda$. Assim, a conservação da energia do fóton dá

$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{Gm_0}{R} \cdot \frac{h}{c\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda},$$

o que leva a

$$R = \frac{Gm_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}{c^2 \Delta\lambda}.$$

Essas duas equações levam a

$$m_0 = \frac{c^2 \Delta\lambda \,(P/\sigma T^4)^{1/2}}{G(\lambda_0 + \Delta\lambda)}\,\ell.$$

As estrelas estão girando em torno do centro de massa com velocidades angulares iguais

$$\varpi = (2\pi/2\tau) = \pi/\tau.$$

As condições de equilíbrio para as estrelas são

$$\frac{GMm_0}{r_1 + r_2} = m_0 r_1 \varpi^2 = M r_2 \varpi^2,$$

com

$$r_1 = \ell\frac{\Delta\theta}{2}, \quad r_2 = \ell\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Dessas equações acima, obtemos:

$$\ell = \left[\frac{8c^2 \Delta\lambda (P/\sigma T^4)^{1/2}}{\Delta\varphi(\pi/\tau)^2(\lambda_0 + \Delta\lambda)(\Delta\theta + \Delta\varphi)^2}\right]^{1/2}.$$

b) A distância de máxima aproximação das duas estrelas do sistema binário: a conservação do momento angular para a estrela ordinária é

$$mr^2\varpi = m_0 r_0 \varpi_0.$$

A conservação do momento angular para dm:

$$r^2 \varpi \,\mathrm{d}m = r_f^2 \varpi_f \,\mathrm{d}m,$$

onde ϖ_f é a velocidade angular do anel. O equilíbrio no estado original dá:

$$\varpi_0 = \left(\frac{GM}{r_0}\right)^{1/2}, \quad \varpi_f = \frac{m_0 r_0}{m r_f^2}\left(\frac{GM}{r_0}\right)^{1/2}.$$

A conservação da energia para dm leva a

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}m(v_0^2 + r^2\varpi^2) - \frac{GM\mathrm{d}m}{r} = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\, r_f^2 \varpi_f^2 - \frac{GM\mathrm{d}m}{r_f}.$$

Substituindo ϖ, obtém-se

$$v_0^2 + \frac{m_0^2 r_0 GM}{m^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_f^2}\right) - 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_f}\right) = 0.$$

Como $r_0 > r_f$, se r > r_0 os termos em $1/r$ e $1/r^2$ podem ser desprezados. Então

$$r_f = \frac{GM}{v_0^2}\left[\left(1 + \frac{m_0^2 r_0 v_0^2}{GMm^2}\right)^{1/2} - 1\right].$$

Para mostrar que $r > r_0$: a variação do momento angular da estrela ordinária em seu sistema de referência é

$$-\frac{GMm}{r^2} + mr\varpi^2 - m\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = -v_0\frac{\mathrm{d}m_{gas}}{\mathrm{d}t}.$$

Essa equação implica na existência de uma força inicialmente para fora e, portanto, r começa a crescer. Usando a conservação do momento angular da estrela ordinária,

$$mr\varpi^2 = \frac{m_0^2 r_0^4 \varpi_0^2}{mr^3}.$$

Logo, a razão força gravitacional/força centrípeta é proporcional a $m^2 r$. A massa m diminui. Se r começa também a diminuir após algum tempo, essa razão começa a diminuir, o que é uma contradição. Logo, $r > r_0$.

3 A lebre perseguindo a raposa. Comecemos por calcular o tempo necessário para que a raposa alcance a lebre. Considere a projeção das velocidades ao longo da linha que os conecta. A velocidade relativa da raposa e da lebre ao longo desta linha é

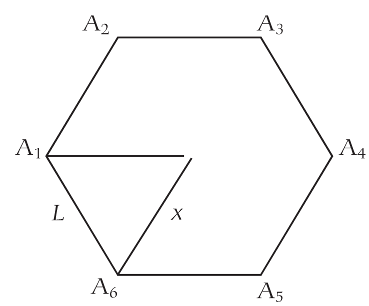
$$v_{rel} = v(1 - \cos\alpha),$$

de onde obtemos

$$\tau = \frac{L}{v_{rel}} = \frac{L}{v[1 - \cos\alpha]},$$

que é correta para todos os três casos.

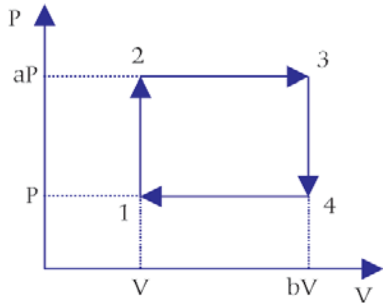
Para se determinar o ponto onde a raposa pega a lebre, construamos um hexágono de lado L, como o da figura. Partindo do ponto A_1, movendo-se diretamente para o ponto A_2, do ponto A_2 para o A_3 e assim por diante (que é como a raposa persegue a lebre).



Ao longo da corrida este hexágono ira girar e encolher, mas mantendo-se regular, de modo que o ponto do encontro dos animais será o centro que se localiza a uma distância x da posição inicial da raposa. Caso o ângulo fosse de 90° teríamos um quadrado ao invés de um hexágono, e se o ângulo fosse 40°, teríamos um eneágono. Em qualquer caso a distância procurada será

$$x = \frac{L}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}.$$

4 Eficiência de uma máquina térmica operando com um gás monoatômico rarefeito em ciclos. Do enunciado do problema podemos desenhar o ciclo em um diagrama PV, como mostrado na figura abaixo.



O gás, de n moles, recebe calor durantes os processos 1-2 e 2-3

$$Q = \frac{3}{2}nR(T_3 - T_1) + aP(b-1)V =$$

$$\left[\frac{3}{2}(ab-1) + a(b-1)\right]PV.$$

O trabalho realizado no ciclo 1-2-3-4-1 será

$W = [(a - 1)(b - 1)]PV$.

A eficiência será portanto

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{(a-1)(b-1)}{\frac{3}{2}(ab-1) + a(b-1)} =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}}{\frac{5}{2} - \frac{1}{b} - \frac{3}{2ab}},$$

ou seja, a eficiência aumenta com a e b, e para valores muito grandes de a e b ela se aproxima de

$$\eta = 2/5 = 0.4 = 40\%.$$

5 Capacitar variável de capacitância inicial C_0 carregado a uma ddp V. A corrente elétrica no circuito é determinada pela queda de tensão sobre o resistor, que é justamente $I = V/R$. Como a corrente deve ser estacionária, a queda de tensão no capacitor será também constante, isto é

$$\frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 - \Delta q}{C},$$

em que q_0 é a carga inicial no capacitor, $\Delta q = It = Vt/R$ é a carga fluindo pelo circuito no instante t, e C é a capacitância naquele momento. Segue então que

$$C = C_0\left(1 - \frac{\Delta q}{q_0}\right) = C_0\left(1 - \frac{t}{RC_0}\right).$$

A variação na energia do sistema é igual ao trabalho realizado pelas forças externas,

$$\left(\frac{CV^2}{2} - \frac{C_0V^2}{2}\right) + I^2Rt = Pt,$$

em que P é a potência das forças externas. Com isso obtemos

$$P = \frac{V^2}{2R}.$$

Novos problemas

(Selecionados da extinta revista Quantum, da Associação de Professores da Rússia)

1 Uma esteira rolante: Uma pessoa sobe a partir do chão em uma primeira esteira rolante em movimento, e então passa para outra esteira que anda mais rapidamente, e assim sucessivamente. Considere a primeira esteira rolando com uma velocidade constante $v_1 = 2$ m/s. Uma pessoa sobe nela perpendicularmente à sua direção de movimento. Ao subir, a pessoa fica firmemente na esteira (não ocorre deslizamento), e então passa para a segunda esteira também entrando perpendicularmente ao seu movimento. A carga máxima projetada para tais esteiras (número de pessoas subindo nelas) é de $N = 10$ pessoas/s, e a massa média das pessoas é suposta ser $M = 80$ kg. Qual é a força mínima necessária para puxar a esteira horizontalmente a uma velocidade constante? Que força deve ser aplicada na segunda esteira para que ela se mova com velocidade constante de $v_2 = 3$ m/s? Suponha que o número de pessoas em cada esteira seja o mesmo.

2 Célula solar: um voltímetro multiescala é composto de um microamperímetro sensível e um conjunto de resistências em série é usado para se estudar uma célula solar. Quando ele é conectado à célula usando 1-volt de escala, lê-se $V_1 = 0.7$ V, e usando a escala de 10 V lê-se $V_2 = 2.6$ V. Qual seria a leitura se a escala usada for de 100 V? É sabido que sob iluminação constante uma célula solar é uma fonte de força eletromotriz acoplada com uma grande resistência em série.

3 Circuito oscilante: Um capacitor em um circuito com a chave S aberta é carregado até um potencial V_0 (veja a figura abaixo). A chave é então fechada, e após algum tempo a corrente cessa. Qual deve ser V_0 de modo a carregar o capacitor para que a voltagem estacionária $V_{ss} = 1$ V com sua polaridade oposta à sua polaridade inicial? Suponha que a força eletromotriz de cada bateria seja $E = 1.5$ V e que os diodos sejam ideais.