

$$1/[L \cdot (M/L^3)] =$$

O ensino da análise dimensional

$$1/[M/L^2] = L^2 \cdot M^{-1}$$



Fábio W.O. da Silva

Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais, Belo
Horizonte, MG, Brasil
E-mail: fabiowdfm@yahoo.com.br

Introdução

A análise dimensional já foi um conteúdo muito explorado no ensino de física, sobretudo quando se adotava uma visão de ensino axiomático-dedutiva. As inovações pedagógicas ocorridas nas últimas décadas fizeram com que o tema gradualmente perdesse espaço, chegando a ser completamente eliminado dos principais livros-texto, do Ensino Médio à universidade. Sem desprezecer as valiosas contribuições trazidas pelas novas metodologias de ensino, os equívocos encontrados em um relatório recente, produzido por dois doutores em química orgânica, sugerem a conveniência de se voltar a conferir maior atenção a esse tema.

Um dos princípios básicos da análise dimensional é a homogeneidade, segundo o qual os dois membros de uma equação que exprima uma lei física ou descreva um processo físico devem ser homogêneos em relação a cada grandeza de base. Por isso, a análise dimensional é usada habitualmente como uma técnica heurística para obtenção de equações que representam leis científicas, fornecendo indicações sobre os parâmetros que supostamente influenciam um fenômeno específico. Um aspecto menos explorado, mas nem por isso menos relevante, é que a validade desse resultado depende das unidades de medida. Portanto, as unidades podem ser escolhidas arbitrariamente, definindo-se então de forma conveniente as constantes de proporcionalidade.

Um dos princípios básicos da análise dimensional é a homogeneidade, segundo o qual os dois membros de uma equação que exprima uma lei física devem ser homogêneos em relação a cada grandeza de base

O tema do relatório que despertou a atenção é uma técnica tradicional para determinação da concentração de soluções de substâncias opticamente ativas, ou seja,

que possuem a propriedade de girar o plano de polarização da luz para a esquerda (-) ou para a direita (+). A medida é realizada por meio de um polarímetro, mostrado esquematicamente na Fig. 1. A luz fornecida pela fonte à esquerda é polarizada pelo primeiro filtro, penetra no tubo com a solução e o plano de polarização é girado à medida que atravessa o tubo. O ângulo total de giro (α) é determinado por meio do filtro analisador e depende do número de moléculas opticamente ativas encontradas ao longo da trajetória. Portanto, α é uma função do comprimento total de solução atravessada pela luz (L) e da concentração da substância (c).

Para que as rotações sejam medidas em uma base padrão, habitualmente recorre-se a uma grandeza denominada *rotação específica* ou *poder rotatório*, $[\alpha]$. A rotação específica é característica de cada substância e pode ser determinada experimentalmente por

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{L \cdot c}$$

em que α é a rotação observada, L é o comprimento do tubo que contém a solução e c é a concentração da solução. Dessa forma, conhecendo-se $[\alpha]$, L e c , é possível

prever a rotação do plano de polarização de um feixe de luz ao atravessar a solução. Além disso, como a rotação específica depende da temperatura (T) e do comprimento de onda da luz (λ),

essas condições devem ser explicitadas. Por exemplo, $[\alpha]_D^{25}$ significa que a medida foi realizada a 25 °C, usando-se a linha D de uma lâmpada de sódio ($\lambda = 589,6$ nm).

A convenção usual da área estabelece que os parâmetros na equação da rotação sejam expressos nas seguintes unidades:

Neste trabalho, sugere-se dar maior ênfase à análise dimensional no ensino de física. Partindo de um caso real, em que um erro foi cometido por deficiência desse conteúdo, procura-se analisar esse erro com base no conceito de dimensão, na diferença entre grandezas fundamentais e grandezas derivadas, equações empíricas e resultados experimentais.

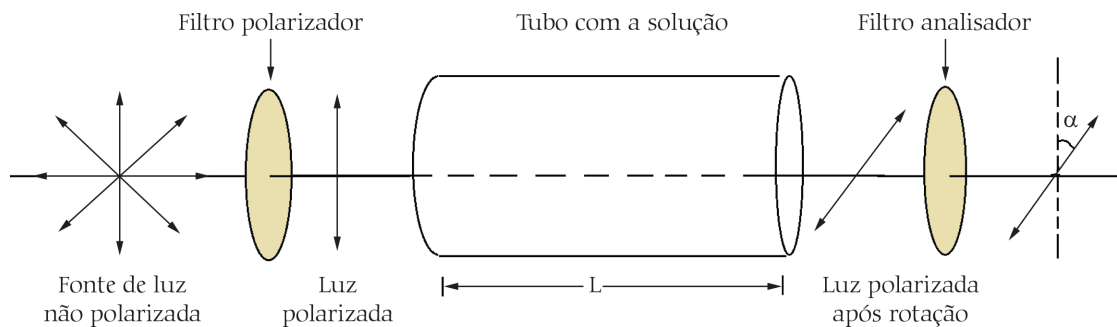


Figura 1 – O polarímetro.

α em graus, L em decímetros e c em gramas por mililitro de solução [1-3]. Por exemplo, se o plano da luz for girado de $\alpha = +0,10^\circ$, após atravessar 10 cm de uma solução que contenha 1,0 g da substância em 40 mL de solvente, a rotação específica será: $[\alpha] = +0,10^\circ / (1,0 \text{ dm} \cdot 0,025 \text{ g/mL}) = +4,0^\circ / (\text{dm} \cdot \text{g/mL})$. Habitualmente os manuais omitem a unidade de $[\alpha]$, já que se trata de um padrão [2], e representam apenas $[\alpha] = +4,0^\circ$.

● problema

O relatório discute a resposta a um problema mal formulado, para o qual se deve calcular $[\alpha]$ com base nos seguintes dados: $\alpha = -2,5^\circ$; $L = 10 \text{ cm}$; $c = 1,0 \text{ g}$ de uma substância opticamente ativa em 20 mL de solução. Seguindo o procedimento padrão [1], obtém-se $[\alpha]_D = -2,5^\circ / [(1,0 \text{ dm}) \cdot (0,050 \text{ g/mL})] = -50^\circ / (\text{dm} \cdot \text{g/mL})$, ou simplesmente $[\alpha] = -50^\circ$. Os autores contestam essa resposta, afirmando textualmente que “ela explicitou no cálculo principal apenas a unidade do comprimento da célula em dm e colocou a concentração em g/mL, ou seja, não há compatibilidade entre as unidades usadas (mL e dm) e o valor gerado está errado. Na verdade, o cálculo correto (em cm) seria: $[\alpha]_D = \alpha / (c \cdot L) = -2,5^\circ / (1 \text{ g} / 20 \text{ cm}^3) \times 10 \text{ cm} = -50^\circ$ ”.

Entre os dois procedimentos, há uma diferença de uma ordem de grandeza. Qual deles está correto? Onde está o erro? Procedem as referidas alegações?

A análise dessas questões, desenvolvida a seguir, comentará três aspectos:

1) A razão entre grau ($^\circ$) e [(grama/centímetro cúbico) · centímetro] não é dimensional ($^\circ$), mas [grau · (cm²/g)].

2) O relatório não considerou a presença da constante de proporcionalidade.

3) A mudança de unidades não altera a homogeneidade de uma equação (aparentemente, a *compatibilidade* à qual se refere o texto).

O primeiro aspecto é evidente por si mesmo, basta explicitar todas as unidades, como foi feito, e verificar que não se obtém o resultado em graus, como foi afirmado. Uma interpretação para a linha de raciocínio daqueles autores seria a hipótese de que, se o comprimento L estivesse em cm e a concentração c em g/cm³, a unidade cm poderia ser “simplificada” com a unidade cm³, o que não seria factível se as unidades fossem dm e g/mL, respectivamente. Provavelmente, resultaria daí a suposta “incompatibilidade”.

Quanto ao segundo aspecto, é conveniente esclarecer que as constantes de proporcionalidade estão presentes em todas as equações físicas. Por exemplo, considere-se a força gravitacional entre duas partículas de massas m_1 e m_2 , separadas pela distância r . De acordo com a teoria da gravitação de Newton, essa força é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que

as separa: $F \propto (m_1 \cdot m_2) / r^2$. Entretanto, usando-se o sistema internacional de unidades (SI), duas massas de 1 quilograma separadas por 1 metro não se atraem com a intensidade de 1 newton. Falta na expressão uma constante de proporcionalidade (G), com um valor numérico a ser determinado experimentalmente: $F = G (m_1 \cdot m_2) / r^2$.

O fator G poderia até ser unitário, bastaria redefinir a unidade de força (newton, por que não?) a partir dos valores das outras grandezas envolvidas, ou seja, se 1 newton fosse igual à intensidade da força gravitacional produzida por duas partículas de 1 kg distantes 1 m uma da outra. Ainda assim, contudo, faltaria

atribuir a essa constante uma unidade. Adotando-se mais uma vez o SI, o produto das unidades do segundo membro, sem levar em conta G , forneceria kg²/m², que não corresponde a uma força ($N = \text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$). Portanto, a unidade de G seria N (m²/kg²) = (kg m/s²) · (m²/kg²) = kg⁻¹ · m⁻¹ · s⁻². Se as unidades de massa, distância e força fossem outras, o valor de G seria automaticamente modificado, mesmo assim a unidade de G deveria conter (unidade de massa x unidade de distância)⁻¹ (unidade de tempo)⁻². Em outras palavras, a dimensão de G seria conservada, o que remete à discussão da análise dimensional.

● conceito de dimensão

O termo *dimensão* tem origem na geometria euclidiana, em que são admitidos apenas valores inteiros: uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e o espaço tem dimensão 3. A extensão à física exigiu adequações, pois não se resume a associar um expoente a uma grandeza, mas trata-se de expressar a natureza dessa grandeza. A história remonta pelo menos ao Século XVIII [4]. O trabalho mais antigo nessa área é atribuído a François Daviet de Foncenex (1734-1799) e foi publicado em 1761 [5], com o objetivo de estabelecer *a priori* as leis fundamentais da mecânica. Mais especificamente, ele buscava um método para: (1) demonstrar de maneira exata e rigorosa os princípios fundamentais da mecânica, que seriam a lei da inércia, da composição de forças (ou do paralelogramo) e do equilíbrio; (2) responder à pergunta se as leis da mecânica seriam verdades necessárias ou contingentes. Se obtivesse êxito em fundar as leis da mecânica sobre considerações puramente arbitrarias e intelectuais, elas conteriam uma verdade tão necessária quanto as proposições da geometria (euclidiana).

Foncenex não explicita o conceito de dimensão que utiliza, mas é possível apreendê-lo em seu trabalho. Para demonstrar a lei da composição de forças, considera inicialmente que a resultante (R) de duas

Se obtivesse êxito em fundar as leis da mecânica sobre considerações puramente arbitrarias e intelectuais, elas conteriam uma verdade tão necessária quanto as proposições da geometria

forças só pode depender das forças componentes (F) e do ângulo entre elas (ϕ), ou seja, $R = \text{função}(F, \phi)$. Como a força R possui a mesma natureza das forças F , R deve conter o mesmo número de dimensões de F , pois a dimensão de ϕ é nula: $R = \text{função}(F, \phi) = F \cdot \text{função} \phi$. A argumentação de Foncenex refere-se ao que hoje denomina-se *homogeneidade dimensional*, ou seja, os dois membros da equação devem possuir a mesma natureza, objeto da análise dimensional.

Em uma nota de rodapé [5, p. 306], Foncenex afirma que, por esse método, poderia demonstrar de forma direta e natural diversos teoremas sobre a proporcionalidade dos lados das figuras, e um grande número de outras proposições da geometria e da mecânica. Isso refletia o contexto de ciência da época, dominado pela mecânica newtoniana e pela geometria euclidiana, marcado por uma grande expectativa quanto à possibilidade de um conhecimento fundamental *a priori*. Desde então, diversos pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento da área, entre eles, Fourier e Poisson.

Atualmente, esse tipo de análise conserva sua utilidade, apesar de ligada a objetivos menos ambiciosos. Como método heurístico, são importantes as aplicações baseadas no teorema π de Buckingham [6]. De modo geral, trata-se de um conteúdo imprescindível à educação científica dos estudantes, capaz de orientá-los em diversas situações.

A análise dimensional

As grandezas físicas não são todas independentes umas das outras. Por exemplo, representando-se a dimensão do deslocamento por L (comprimento, do francês *longueur*) e do tempo por T (tempo, do francês *temps*), a dimensão da velocidade ficará automaticamente determinada: $L/T = LT^{-1}$ [7]. Assim, partindo de um pequeno conjunto de grandezas, consideradas fundamentais, é possível determinar a dimensão de qualquer grandeza derivada. Atualmente, são consideradas fundamentais as seguintes grandezas [8], com os respectivos símbolos de dimensão: comprimento (L), tempo (T), massa (M), corrente elétrica (I), temperatura termodinâmica (θ), quantidade de matéria (N), intensidade luminosa (J).

Independentemente das unidades empregadas para representar essas grandezas, a natureza dimensional dos membros de uma equação permanece inalterada. Se os autores do relatório em pauta soubessem disso, perceberiam que, ao substituírem as unidades de comprimento da célula, usando centímetro em lugar de

decímetro; e de volume, usando centímetro cúbico em lugar de mililitro, multiplicariam o resultado por uma potência de dez ($1 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ dm}$), sem modificar sua natureza dimensional, ou seja, o resultado do cálculo teria sempre a mesma dimensão: $\text{ângulo (adimensional)}/[\text{comprimento}(L) \cdot \text{massa}(M)/\text{volume}(L^3)] = 1/[L \cdot (M/L^3)] = 1/[M/L^2] = L^2 \cdot M^{-1}$. Portanto, está implícita na equação uma constante de proporcionalidade, necessária ao estabelecimento da homogeneidade entre seus dois membros.

O resultado desse cálculo não possui dimensão de ângulo (adimensional), nem de ângulo por comprimento (L^{-1}), quaisquer que fossem as unidades usadas, mas de comprimento²/massa. Na análise, não se fez nenhuma referência às unidades de medida, nem a um sistema específico, apenas à natureza das grandezas envolvidas. A dimensão de uma grandeza não se altera com a mudança das unidades usadas para expressá-la. Em termos da geometria, que inspirou esse tipo de consideração, seria o equivalente a afirmar que a área de um retângulo possuirá sempre a dimensão dois (R^2), esteja o comprimento dos lados em metros, centímetros, polegadas, jardas ou côvados. A dimensão 2 não é função da unidade empregada, mas expressa a natureza da superfície no espaço euclidiano. É uma ingenuidade acreditar que uma alteração de unidade de medida, por exemplo, de centímetro para metro, pudesse converter R^2 em R ou R^3 .

Equações empíricas e resultados experimentais

Em ciência, algumas equações são obtidas a partir de outras equações mais fundamentais ou a partir de primeiros princípios por meio de operações matemáticas. É o caso de obter a aceleração de uma partícula derivando-se a expressão da velocidade em relação ao tempo, $a = dv/dt$. Por exemplo, considere-se $v = 2t$, em que a velocidade é diretamente proporcional ao tempo. Derivando-se v em relação ao tempo, obtém-se: $a = 2$. Há uma constante implícita nessas expressões (k), de dimensão L/T^2 , que assegura sua homogeneidade: $v = 2 [k] t$, que também faz com que a aceleração resultante apareça com a dimensão correta.

Em pesquisa experimental, é muito frequente o recurso a equações fenomenológicas, ou empíricas, criadas para correlacionar dados de laboratório. Nesse caso, a grandeza obtida é expressa em ter-

mos das grandezas consideradas relevantes para a modelagem do sistema, geralmente nas unidades mais convenientes para o experimentador. Um caso muito conhecido é a equação de Rydberg, que descreve as linhas espectrais de emissão do hidrogênio, $1/\lambda = R_H(1/n_1^2 - 1/n_2^2)$, em que λ é o comprimento de onda da luz emitida, R_H é a constante de Rydberg e n_1/n_2 são números inteiros, tal que $n_1 < n_2$. A constante R_H depende da unidade de λ . Alguns autores preferem expressar λ em metros, outros em nanômetros (10^{-9} m) ou em angstroms ($\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$), uma unidade mais usual entre os espectroscopistas. A constante R_H deverá ser compatível com essa opção.

Um experimento comum em laboratórios de ensino de física trata da relação entre a deformação de uma mola e a intensidade da força restauradora. Para pequenas deformações, a força restau-

radora é proporcional à deformação (lei de Hooke). Suponha-se que, ao medir a força em newtons (N) e a deformação em centímetros (cm), tenha sido estabelecida a relação $F = 20x$. Isso não significa que a força possui unidade de comprimento (x), pois, embutido no fator multiplicativo 20, usualmente denominado *constante elástica da mola*, ou simplesmente *constante da mola*, há um fator de proporcionalidade expresso em N/cm.

A equação para a rotação do plano de polarização da luz pertence a essa última categoria. Em 1860, o físico Jean-Baptiste Biot (1774-1862) publicou uma síntese de seus trabalhos intitulada *Introdução às Pesquisas Sobre Mecânica Química*, em que revê “o conjunto desses fenômenos singulares, que foram para mim objeto de estudos perseverantes durante mais de quarenta anos” [9, p. 2]. Esses fenômenos singulares aos quais ele se refere estão ligados à propriedade de algumas soluções de desviarem o plano de polarização da luz. Ele chama a atenção dos químicos para numerosos casos de combinações moleculares em proporções que podem variar continuamente nos meios líquidos, de maneira invisível, sem que qualquer dos componentes se separe do conjunto. Entretanto, apesar de invisíveis, esses componentes podem ser medidos por meio da técnica descrita.

Biot não era arrogante, já de início reconheceu que foi “o acaso, esse grande promotor das descobertas físicas”, que o levou a perceber o fenômeno em 1815, em experimentos que tinham um objetivo

Independentemente das unidades empregadas para representar essas grandezas, a natureza dimensional dos membros de uma equação permanece inalterada

completamente diverso. Em seguida, ele explicou a montagem, a mesma que aparece esquematizada nos livros atuais sobre o tema, e apresentou a famosa equação:

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{L \cdot \varepsilon \cdot \delta}$$

em que denominou $[\alpha]$ de *poder rotatório molecular dos corpos*; α , a rotação observada; L , o comprimento do tubo, inicialmente em milímetros; ε , a fração do sistema misto e δ , a concentração efetiva da solução. No caso de um meio inteiramente composto pela substância ativa, tem-se $\varepsilon = 1$ e $[\alpha] = \alpha/(L \cdot \delta)$.

Ainda nesse trabalho, o descobridor do fenômeno e criador da equação esclareceu [9, p. 7]:

Nas aplicações, para não ter que operar com frações muito pequenas, multipliquei habitualmente o valor numérico de $[\alpha]$ por 100. Sob essa forma, eu o denominei de *poder rotatório por 100 milímetros*. Então, quando desejamos aplicar a expressão com essa modificação, para obter os desvios α por um cálculo inverso, é necessário, em compensação, expressar L em decímetro, e não mais em milímetro, por unidade de comprimento.

Assim, a prática de expressar o comprimento do tubo em decímetros, e não em milímetros ou centímetros, possui uma tradição de mais de 200 anos e foi motivada por uma conveniência experimental. Essa é a forma consagrada da equação, estabelecida por seu criador, o

físico Jean-Baptiste Biot, e respeitada pela maioria dos autores. Atualmente, ao referir-se ao poder rotatório específico, fica implícito que se trata de poder rotatório por decímetro, e o comprimento do tubo deve ser expresso em decímetros. Essa é a tradição da área, motivada por uma conveniência experimental, mas que não prejudica a homogeneidade da equação, como foi demonstrado na seção anterior.

Este exemplo ilustra um caso em que a história da ciência pode contribuir para compreender a origem de práticas consagradas e evitar equívocos elementares. Parece também corroborar a opinião de Moreira [10], segundo a qual o ensino de física não deve ser pautado por um único enfoque, pois, se cada vertente de ensino tem seu valor, possui também suas limitações. Portanto, a construção do conhecimento a partir de situações reais, a exploração da experiência sensorial do estudante ou a busca pelo desenvolvimento de suas habilidades investigativas, para citar apenas algumas possibilidades, não dispensam a preocupação com o rigor e a formalidade da ciência, características de um paradigma anterior no ensino de física. Finalmente, faz ainda recordar a propriedade das palavras de Drucker [11, p. 156], proferidas em uma palestra acerca do conhecimento:

...é necessário conhecer os fundamentos. (...) Todos nós tendemos a ser especialistas, e subimos na carreira publicando artigos eruditos de pesquisa em um periódico erudito sobre o mais recente

truque. E nós mesmos não enfatizamos os fundamentos. Nós os supomos conhecidos, o que é sempre um erro.

Conclusão

A análise dimensional desempenha um papel crucial na formação científica dos estudantes. Apesar de não mais se esperar que esse método demonstre *a priori* as leis da mecânica, seu objetivo inicial, conserva-se como um poderoso auxiliar para o entendimento da ciência e para a compreensão das grandezas envolvidas em suas equações.

A dimensão de uma grandeza permite reconhecer o vínculo que ela mantém com grandezas análogas e a diferenciá-la de outras com as quais não possui qualquer semelhança. Esse método de estabelecimento da identidade de grandezas análogas, apesar de aparentemente diversas, é a análise dimensional. Ela realiza uma espécie de exame de DNA da estrutura subjacente às definições operacionais, que independente das unidades particulares em que são expressas.

Os fatos aqui relatados sugerem a necessidade de ensinar as unidades de medida e a análise dimensional desde o início da formação científica do estudante. Uma vez perdida essa oportunidade, alguns estudantes carregarão ao longo da vida as deficiências oriundas de uma iniciação inadequada, podendo até alcançar a titulação máxima do grau acadêmico, cometendo erros inadmissíveis em um estudante regular do Ensino Médio.

Para obter os desvios α por um cálculo inverso, é necessário, em compensação, expressar L em decímetros

Referências

- [1] T.W.G. Solomons e C.B. Fryhle, *Química Orgânica* (LTC, Rio de Janeiro, 1998).
- [2] G. Gunawardena, Specific Rotation in *The Elements of Organic Chemistry*. Disponível em <http://www.ochempal.org/index.php/alphabetical/s-t/specific-rotation>, acesso em 26/4/2016.
- [3] Specific rotation, Dicionário Merriam-Webster. Disponível em <http://www.merriam-webster.com/dictionary/specific%20rotation>, acesso em 26/4/2016.
- [4] R.A. Martins, in: *Filosofia e História da Ciência no Cone Sul. 3º Encontro*, organizado por R.A. Martins, L.A.C.P. Martins, C.C. Silva, e M.H. Ferreira (Associação de Filosofia e História da Ciência do Cone Sul, Campinas, 2008).
- [5] D. de Foncenex, Sur les sprincipes fondamentaux de la mécanique, *Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin* v. 2, p. 299-322, 1760-1761. Disponível em <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uiug.30112067989589>, acesso em 26/4/2016.
- [6] T. Szirtes and P. Rozsa, *Applied Dimensional Analysis and Modeling* (McGraw Hill, New York, 1997).
- [7] Análise dimensional. Disponível em http://www.cefetsp.br/edu/okamura/analise_dimensional.htm, acesso em 26/4/2016.
- [8] Le système international d'unités, The International System of Units SI. Disponível em http://www.nist.gov/pml/div684/fcdc/upload/si_brochure_8.pdf, acesso em 26/4/2016.
- [9] J.B. Biot, *Introduction aux Recherches de Mécanique Chimique: Dans Lesquelles la Lumière Polarisée est Employée Auxiliairement Comme Réactif* (Mallet-Bachelier, Paris, 1860). Disponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k951698.r>, acesso em 26/4/2016.
- [10] M.A. Moreira, Ensino de Física no Brasil: Retrospectiva e Perspectivas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 94 (2000).
- [11] P.F. Drucker, *Drucker em 33 Lições: As Melhores Aulas do Homem que Inventou a Administração* (Saraiva, São Paulo, 2011).