

# Traçado da cáustica a partir de imagens do *Google Maps*: uma atividade em óptica geométrica para o Ensino Médio

Jair Lúcio Prados Ribeiro

Programa de Pós-Graduação em  
Educação em Ciências, Universidade de  
Brasília, Brasília, DF, Brasil  
E-mail: jairlucio@gmail.com

## Introdução

O estudo das imagens formadas por espelhos curvos é um tópico sempre presente na apresentação da óptica do Ensino Médio. A exposição desse conteúdo nos livros didáticos voltados para essa fase de aprendizagem é uniforme, concentrando-se no estudo das imagens conjugadas por espelhos esféricos ditos *gaussianos* [1-9]. A modelagem geométrica e algébrica desses espelhos obedece às condições de aproximação de Gauss, que podem ser resumidas na necessidade de raios paraxiais (próximos ao eixo principal) e em uma pequena curvatura do espelho.

A citação de espelhos cilíndricos é rara [6] nos livros-texto de física do Ensino Médio, apesar de diversos objetos cotidianos (e até mesmo edifícios) espelhados se assemelharem aos mesmos. De forma paradoxal, embora algumas das obras didáticas façam referência somente a espelhos esféricos em seus textos, as mesmas apresentam fotografias de espelhos cilíndricos côncavos ou convexos como exemplos [1,7].

A cáustica, importante aberração monocromática comum em espelhos curvos, também não costuma merecer atenção dessas obras, sendo poucas as menções ao fenômeno [9]. Em um espelho esférico gaussiano, um feixe de raios paralelos ao eixo principal irá convergir no foco de um espelho côncavo (ou divergir a partir do foco de um espelho convexo), um ponto localizado na metade do raio (Fig. 1). Entretanto, em um espelho não-gaussiano, como uma seção circular de uma esfera ou cilindro, esse feixe de raios paralelos não observará convergência ou

divergência total em um único ponto, sendo que o entrecruzamento dos raios se dá ao longo de uma curva característica, chamada cáustica (Fig. 1). Essa aberração pode facilmente ser observada em uma xícara exposta à luz do Sol [10] ou em outro recipiente que tenha formato cilíndrico, conforme mostrado na Fig. 2.

Um detalhamento algébrico sobre a cáustica está disponível em diversos textos [10-12], mas a nosso ver, não é necessária tal apresentação no Ensino Médio, sendo preferível a exposição do tema de forma qualitativa ou experimental. Todavia, discordamos da sua ausência no conteúdo programático, dada a importância de se enfatizar junto aos estudantes que as condições de Gauss são aproximativas. A ênfase nessa simplificação termina por deixar de lado o estudo ou mesmo a menção das aberrações monocromáticas, como a cáustica, a distorção de campo e o astigmatismo, as quais são responsáveis pelos inusitados formatos que as imagens conjugadas por esses espelhos assumem.

## Atividade experimental

Em 2005, a empresa estadunidense *Google* lançou o serviço gratuito *Google Maps*, que permite a visualização de mapas e imagens de satélite da Terra em dispositivos ligados à rede mundial de computadores.<sup>1</sup> Desde a sua inauguração, o serviço tem sido explorado como ferramenta didática, assim como seu produto derivado, o *Google Earth*. Por vezes as atividades pedagógicas são mais evidentes, como no estudo de temas da geografia [13] ou geomorfologia [14], mas também há propostas didáticas em campos relativos às ciências naturais, como a medição de distâncias por métodos geométricos [15], o

**De forma paradoxal, embora algumas das obras didáticas façam referência somente a espelhos esféricos em seus textos, as mesmas apresentam fotografias de espelhos cilíndricos côncavos ou convexos como exemplos**

A ferramenta de busca *Google Maps* exibe fotografias aéreas dos prédios de formato cilíndrico da Procuradoria Geral da República, localizados em Brasília, circundados por projeções de raios de luz refletidos em sua fachada espelhada. Neste artigo, é apresentada uma atividade prática para o traçado da curva cáustica por estudantes de Ensino Médio, a partir do prolongamento das projeções observadas nessas fotografias. A atividade permite estabelecer uma conexão entre os princípios da óptica e a arquitetura, rara na literatura acadêmica.

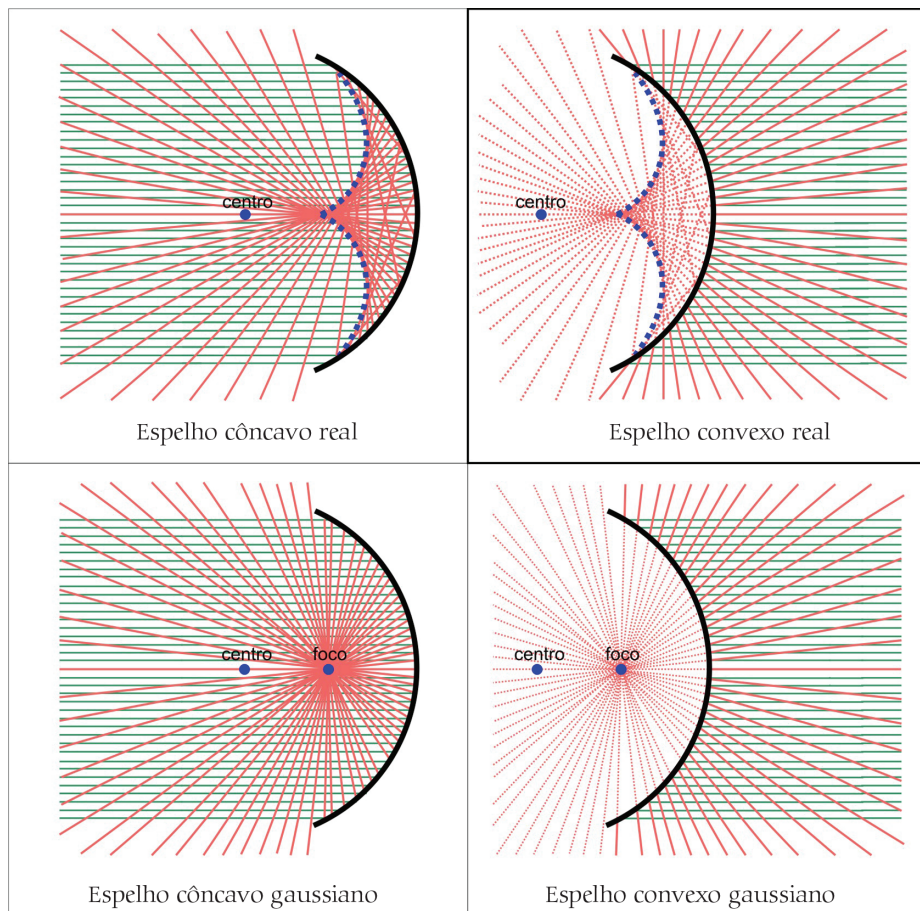


Figura 1. Comparação entre espelhos reais de seção circular e espelhos esféricos gaussianos.



Figura 2. Cáustica de reflexão na superfície côncava interna de um recipiente cilíndrico exposto à incidência da luz solar, conforme sugestão da Ref. [10].

cálculo de velocidades de barcos a partir de leis físicas [16], o estudo de ondas [17], a determinação da declinação magnética de uma localidade [18] ou o significado dos números em pistas de pouso de aviões [18]. Nesse artigo, é proposta uma atividade pedagógica prática de traçado geométrico da curva cáustica por estudantes no Ensino Médio a partir de imagens disponíveis na ferramenta de busca.

Durante a fase de pesquisa para um artigo [19] sobre a modelagem óptica dos prédios da Procuradoria Geral da República (PGR) em Brasília (Fig. 3), observamos um fenômeno luminoso inusitado na imagem disponível no *Google Maps* para os dois edifícios cilíndricos principais que compõem o conjunto arquitetônico da PGR, projetado por Oscar Niemeyer [20]. Ao redor da vista superior do edifício, linhas luminosas estavam projetadas no chão, devido à reflexão da luz solar nas fachadas cilíndricas cobertas por vidros espelhados (Fig. 4).

Foi percebido ainda que as imagens apresentadas pelo *Google Maps* são variáveis: ao acessarmos o sítio uma semana depois, outra fotografia aérea dos edifícios da PGR foi apresentada (Fig. 5), na qual os raios projetados têm maior dimensão. Por vezes, acessamos na mesma data a ferramenta de busca, em máquinas diferentes, e observamos duas fotografias distintas. Entretanto, ambas as imagens obtidas foram consideradas úteis para a atividade prática proposta nesse trabalho, pois, nos dois casos, as fotografias apresentam uma visão superior dos prédios, equivalente a seções transversais circulares dos cilindros refletores.

O fenômeno observado nas imagens aéreas da PGR revelou-se excepcional. Foram buscados na ferramenta outros edifícios também de formato cilíndrico,<sup>2</sup> para fins de comparação com as edificações da PGR, entretanto nenhuma das fotografias dessas outras edificações revelou a projeção no solo de raios refletidos em suas janelas. Foi percebido que essa ausência pode ser causada por diversos fatores, tais como a baixa resolução das imagens, a pequena área ocupada pelas janelas na fachada, o uso de vidros sem película refletora, o ângulo em que a fotografia foi obtida (resultando em uma vista quase lateral do cilindro, ao invés da vista superior) ou o posicionamento do prédio no terreno, sendo comum que outra construção (ou sua sombra) cubra a área onde os raios refletidos poderiam estar projetados.

Uma impressão da Fig. 5 foi usada no desenvolvimento da atividade prática com estudantes de Ensino Médio, versan-



Figura 3. Visão do conjunto arquitetônico da Procuradoria Geral da República, em Brasília. A película que reveste os vidros não é azul, podendo refletir todo o espectro. Como a fotografia foi obtida em um dia claro e sem nuvens, a imagem refletida do céu forneceu a tonalidade azulada.

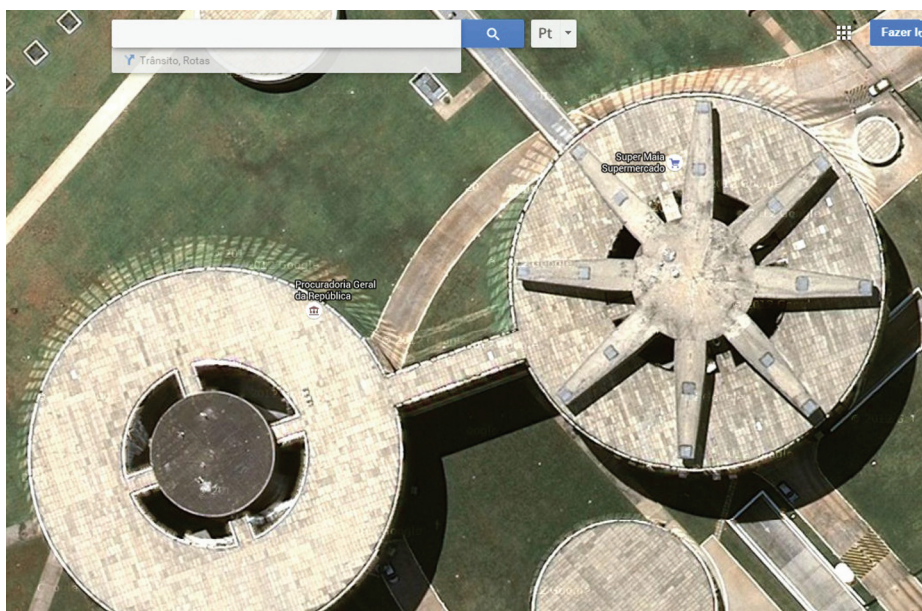


Figura 4. Raios de luz refletidos na fachada da PGR são projetados no solo. Fonte: *Google Maps*, <https://www.google.com.br/maps/@-15.8076342,-47.8595607,143m/data=!3m1!1e3?hl=pt-BR>, acesso 3 maio 2015.

do sobre a cáustica em espelhos convexos e as limitações das aproximações de Gauss. As reproduções da fotografia foram impressas em papel A4 e cobertas com papel de seda. Cada estudante deveria traçar nesse papel transparente, com lápis e régua, os prolongamentos dos raios refletidos e verificar onde estavam locali-

zados os pontos de maior concentração, interligando-os em seguida (Fig. 6).

A Fig. 6 apresenta uma variante digital da atividade realizada pelos alunos, sobre a imagem de apenas um dos prédios da PGR. O traçado dos prolongamentos foi feito por meio de um programa de edição gráfica, para maior precisão. Nessa

figura, é possível perceber que os prolongamentos dos raios de luz não se encontram em um único ponto (foco virtual), como seria esperado em um espelho gaussiano, mas sim ao longo da cáustica, mostrando as limitações das condições de aproximação usadas em óptica para os objetos do cotidiano.

### Discussão dos resultados

Durante a atividade, um questionamento se revelou frequente entre os estudantes: em que ponto o prolongamento dos raios deveria ser interrompido? De acordo com a Fig. 1, os feixes podem ser prolongados indefinidamente, sendo a cáustica formada pelos pontos onde a concentração dos feixes da luz refletida é maior. Na atividade proposta, os prolongamentos desenhados a lápis terminam por formar regiões mais escuras, devido à maior concentração de retas em uma região, evidenciando a cáustica. Na Fig. 6, para que a curva se tornasse mais visível, o comprimento dos prolongamentos foi limitado.

A cáustica desenhada pelos estudantes foi comparada com a situação experimental proposta pela Ref. 10 (xícara exposta à radiação solar), para que uma comparação entre os espelhos côncavos (convergentes) e os convexos (divergentes) pudesse ser estabelecida. O traçado da cáustica pelo método descrito permitiu ainda a possibilidade de se encontrar a posição do foco virtual (região de maior concentração dos prolongamentos, resultando em uma mancha escura no papel de seda), sendo possível verificar que essa localização coincide com a aproximação de Gauss (metade do raio). A partir da ligação do centro da seção circular com esse foco, foi possível também determinar a direção aproximada em que o Sol se localizava, no momento da fotografia, em relação à rosa-dos-ventos.

Além do método de traçado da cáustica apresentado, é possível a ampliação da discussão para outros tópicos. Se ambas as imagens forem utilizadas, por exemplo, o tamanho e a posição da sombra podem ser discutidos com os estudantes. Tanto os raios quanto as sombras na Fig. 5 são maiores que aqueles constantes da Fig. 4, indicando diferenças no horário em que as fotografias foram obtidas. Não é possível, entretanto, afirmar de forma categórica o horário em que cada foto foi obtida, pois os momentos do nascente e do poente são variáveis com a época do ano, assim como a “trajetória” apresentada pelo Sol é variável a cada dia. Apesar disso, parece provável que a imagem presente na Fig. 4 tenha sido obtida em



Figura 5. Raios de luz refletidos na fachada da PGR são projetados no solo. Fonte: *Google Maps*, <https://www.google.com.br/maps/@-15.8074881,-47.8592644,72m/data=!3m1!1e3?hl=pt-BR>, acesso 9 maio 2015.

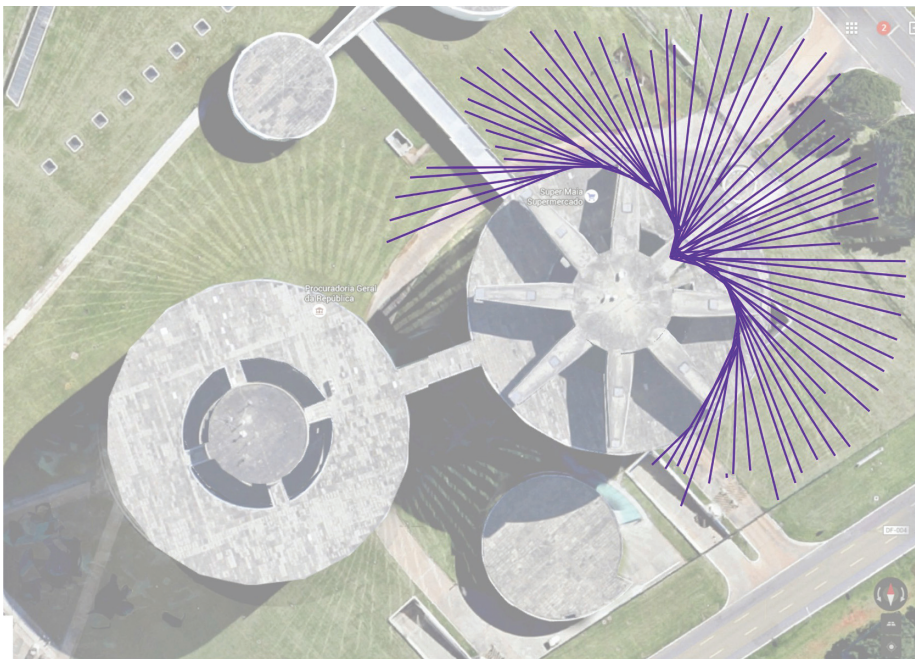


Figura 6. Resultado esperado na atividade didática realizada sobre a Fig. 5, com a visualização da curva cáustica.

um horário próximo à ocorrência do zênite solar (meio-dia), pois tanto a sombra quanto a projeção dos raios refletidos apresentam pequena dimensão, indicando uma incidência quase vertical da radiação solar.

### Conclusões e perspectivas

Uma limitação do método apresentado para o traçado da cáustica reside na

captação de uma fotografia plana de uma situação tridimensional. Os raios de luz oriundos do Sol não são paralelos ao eixo principal da seção circular do cilindro, sendo inclinados em relação ao plano horizontal que contém esse eixo. Se projetados em um terreno desnivelado, os prolongamentos dos feixes de luz observados apresentarão distorção e não permitirão que a cáustica seja percebida. A fotografia

também deve ser obtida em uma posição diretamente superior ao edifício, fato que nem sempre é verificado nas imagens do *Google Maps*. O método produziu bons resultados no caso apresentado devido a uma particularidade da projeção quase horizontal dos raios, dada a predileção de Oscar Niemeyer por terrenos bastante planos para seus projetos. Essa horizontalidade minimizou as eventuais distorções que poderiam ser observadas em um terreno com inclinação variável.

Reconhecemos que a utilização de um modelo simplificado, tal como a formação de imagens quando obedecidas as condições de aproximação de Gauss, é vantajosa para a apresentação de temas no Ensino Médio. Entretanto, sempre que possível, as simplificações constantes do modelo devem ser discutidas ou apresentadas para os estudantes. O tradicional lema da óptica geométrica expresso por “raios paralelos ao eixo principal de um espelho se concentram no foco após reflexão” pode se revelar inócua se não puder ser demonstrado por um experimento – ou, no caso descrito, refutado pelo mesmo. A posição do foco no ponto médio do raio da seção transversal, se não evidenciada de forma experimental, pode se revelar para os estudantes como um mero item a ser memorizado.

Esse trabalho buscou ainda mostrar uma conexão interdisciplinar pouco explorada na literatura acadêmica, entre os campos da arquitetura e da física. Acreditamos que a formação dos profissionais dessas áreas seja tão distinta que termina por padronizar o diálogo entre essas linguagens acadêmicas, sendo frequente apenas em temas específicos, tais como o conforto térmico ou acústico de uma edificação. Entretanto, obras arquitetônicas são por vezes as criações artísticas mais usuais no cotidiano de um estudante, por não estarem confinadas a espaços especiais – ao contrário, elas constituem o próprio espaço.

Seja em arranha-céus ou prédios de menores dimensões, fachadas revestidas por vidros refletores se tornaram uma tônica na arquitetura pós-modernista, ao menos nas grandes cidades, desde os anos 1970. Assim, consideramos relevante que sejam buscadas inovadoras formas de exploração de tal onipresença de superfícies espelhadas de grande dimensão e com formatos variados por professores e pesquisadores da área de ensino da óptica.

### Notas

<sup>1</sup>Segundo a Ref. [18], a maioria das imagens disponíveis no *Google Maps* são reproduções de fotografias obtidas por aviões equipados com câmeras, e não por

satélites.

<sup>2</sup>Foram pesquisadas no sítio imagens do Hotel Nacional (Rio de Janeiro), a sede do jornal L'Humanité (Saint-Denis, França),

o hospital Winnie Palmer (Orlando, EUA), o hotel Lakeside Inn (Ontario, Canadá), o McIntyre Medical Sciences Building (Montreal, Canadá), os centros empresariais

Nai Towers (Aichi, Japão) e Azrieli Center Circular Tower (Tel Aviv, Israel) e a sede da companhia Phoenix Co. Inc. (Hartford, EUA).

## Referências

- [1] I. Anjos, *Física para o Ensino Médio: Volume Único* (IBEP, São Paulo, 2005), 1ª ed., p. 271-280.
- [2] J. Bonjorno, R. Bonjorno, V. Bonjorno, C. Ramos e L. Alves, *Física: Termologia, Óptica e Ondulatória, Volume 2* (FTD, São Paulo, 2010), 1ª ed., p.222-226.
- [3] L. Guimarães e M. Fonte Boa, *Física: Termologia, Óptica e Ondas* (Galera Hiper-mídia, Niterói, 2005), 1ª ed., p. 211-227.
- [4] O. Guimarães, J. Piqueira e W. Carron, *Física 2* (Ática, São Paulo, 2013), 1ª ed., p. 229-240.
- [5] A. Máximo e B. Alvarenga, *Curso de Física, Volume 2* (Scipione, São Paulo, 2005), 1ª ed., p.172-193.
- [6] M. Pietrocola, A. Pogibin, R. Oliveira e T. Romero, *Física em Contextos: Pessoal, Social e Histórico: Energia, Calor, Imagem e Som: Volume 2* (FTD, São Paulo, 2011), 1ª ed., p. 355-404.
- [7] E. Ramalho, N. Ferraro e P. Toledo, *Os Fundamentos da Física vol. 2 - Termologia, Óptica e Ondas* (Moderna, São Paulo, 2007), 9ª ed., p. 260-283.
- [8] C. Silva e B. Barreto, *Física Aula por Aula Vol. 2* (FTD, São Paulo, 2008), 1ª ed., p. 285-296.
- [9] H. Villas-Bôas, R. Doca e G. Biscuola, *Conecte Física 2* (Saraiva, São Paulo, 2011), 1ª ed., p. 314-334.
- [10] F. Catelli e S. Vicenzi, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **21**, 392 (2004).
- [11] E. Hetch, *Optics* (Pearson, Glenview, 2002), 4ª ed., p. 258-281.
- [12] M. Vollmer and K. Möllmann, *European Journal of Physics* **33**, 1429 (2012).
- [13] T. Patterson, *Journal of Geography* **106**, 145 (2007).
- [14] R. Kripka, L. Viali e R. Lahm, *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa* **13**, 89 (2014).
- [15] M. Vollmer, *Physics Education* **48**, 145 (2013).
- [16] C. Aguiar and A. Souza, *Physics Education* **44**, 624 (2009).
- [17] F. Logiurato, *Physics Education* **47**, 73 (2012).
- [18] W. Baird, C. Padgett and J. Secrest, *Physics Education* **50**, 224 (2014).
- [19] Jair Lúcio Prados Ribeiro, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **32**, 837 (2015).
- [20] *Google Maps*, prédio da Procuradoria Geral da República, <https://www.google.com.br/maps/@-15.8074881,-47.8592644,72m/data=!3m1!1e3?hl=pt-BR>, acesso em 22 abril 2015.

## Obras selecionadas - Série MNPEF

Os livros da Série MNPEF são distribuídos gratuitamente aos professores que frequentam os cursos de pós-graduação em qualquer um dos 60 polos distribuídos pelo país.

### A Construção da Estrutura Conceitual da Física Clássica

Autor: Antony Marco Mota Polito  
Instituição: Universidade de Brasília

Pretende-se que o livro seja usado no contexto de uma disciplina de história da física com ênfase em aspectos epistemológicos, em um curso de um semestre. A obra apresenta um panorama do processo de evolução da física por meio de “estudos de caso”. Em cada estudo, o relato do desenvolvimento dos conceitos físicos concernentes é realizado concomitantemente a uma análise que tem como pano de fundo ideias oriundas da epistemologia moderna, porém, respeitado o espírito da época.

### Simulação e Modelagem Computacional com o Software Modellus: Aplicações Práticas para o Ensino de Física

Autor: Marcelo Esteves de Andrade  
Instituição: Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Cariacica

O objetivo principal do livro é abordar a modelagem computacional como uma ferramenta em potencial para o ensino de física no Ensino Médio, mais especificamente usando o programa Modellus, que é um programa livre e já bem difundido no meio acadêmico mas que não possui nenhuma literatura específica sobre o mesmo para aplicação em sala de aula. Através da junção de uma abordagem teórica e prática, pretendemos apresentar esta ferramenta no contexto de sua aplicação no ensino de física em nível médio e fundamental.

