Usando Frações Contínuas para Resolver um Problema de Eletricidade de Forma Criativa

Divaldo P.F. Júnior
Colégio Classe, Goiânia, GO
e-mail: portilho_jr@yahoo.com.br

Fábio M.S. Lima
Instituto de Física,
Universidade de Brasília
e-mail: fabio@fis.unb.br

O tema *frações contínuas* tem recebido pouca atenção por parte dos professores de Matemática do Ensino Médio, sendo que alguns nem sequer tocam neste assunto em suas aulas. Em conseqüência, a grande maioria dos alunos não consegue resolver problemas usando este importante "pré-requisito" matemático. Neste artigo, apresentamos um problema de eletricidade que foi considerado impossível pelos nossos alunos, e mesmo por alguns professores colegas nossos. Após uma breve introdução às frações contínuas, mostraremos como elas podem ser usadas para representar números irracionais, tipo $r + \sqrt{s}$, com r e s sendo números naturais. Usando a representação em frações contínuas desses irracionais, o problema proposto é, então, resolvido de forma simples e criativa.

A Física e a Matemática possuem uma forte relação de interdisciplinaridade em seus conteúdos, principalmente no Ensino Médio. Isso fica claro para o aluno desde o início, quando ele se defronta com os primeiros problemas de cinemática, tendo que calcular, tipicamente, espaços, velocidades e acelerações, o que requer conhecimentos matemáticos prévios, relacionados às funções de 1° e 2° grau e seus respectivos gráficos. Em seguida, no estudo da dinâmica, o conceito de vetor e as noções básicas de trigonometria (principalmente no cálculo de projeções) serão fundamentais para um bom aprendizado das leis de Newton. Na verdade, essa relação interdisciplinar será mantida ao longo de todo o Ensino Médio, de forma que cada novo tópico de Física vai, em geral, requerer o aprendizado de novos pré-requisitos matemáticos por parte do aluno. Dessa forma, fica claro que a ausência de alguns temas no currículo de Matemática pode prejudicar o aprendizado dos tópicos de Física a eles relacionados. Há casos, inclusive, em que o não conhecimento de determinados temas impossibilita os alunos de resolver problemas correlatos. Neste texto, vamos relatar um destes casos, o qual ocorreu recentemente conosco ao propormos um problema de eletricidade aos nossos alunos. Para nossa surpresa, nenhum deles conseguiu chegar à resposta certa, o mesmo ocorrendo, posteriormente, com alguns colegas nossos, professores de Física de outras escolas. Após apresentar a resolução correta do problema e conversar com os alunos, constatamos que isto se deu por falta de conhecimento de um pré-requisito matemático que, de fato, raramente tem sido ensinado nas aulas de Matemática: as *frações contínuas*.

O problema em questão é um exercício de eletricidade envolvendo uma associação mista de resistores idênticos, cada um com resistência R, conforme ilustrado na Fig. 1. As reticências horizontais indicam que o número de sub-malhas quadradas (malhas menores envolvendo quatro resistores, um em cada lado do quadrado) é muito grande, podendo ser considerado como infinito. O exercício consiste em determinar a resistência equivalente entre os terminais do circuito (à esquerda da Fig. 1).

Antes de resolvê-lo, faremos uma breve introdução às frações contínuas, uma das mais importantes ferramentas em Análise Numérica, Teoria dos Números e Matemática Computacional [1]. Isso porque, apesar de ser conceitualmente simples, esse assunto não tem recebido o devido destaque nos livros-texto usualmente adotados no Ensino Médio.

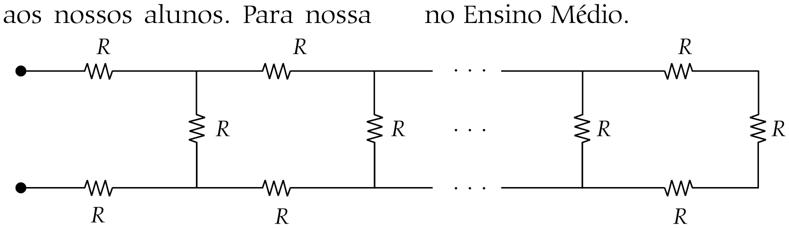


Figura 1. Associação mista de resistores. Observe que o circuito é formado por um número muito grande de sub-malhas quadradas.

Comecemos por verificar como podemos usar uma fração contínua para representar um número **racional**. Por definição, número racional é todo e qualquer número que pode ser escrito como uma razão p/q, onde p é um inteiro p e q é um natural ($q > 0$). Para obter a representação em fração contínua de um tal número, basta que se façam aplicações sucessivas do algoritmo de Euclides para a divisão de inteiros. Assim, fazemos $p = a_0 q + r_0$, com $r_0 < q$, sendo únicos os inteiros a_0 e r_0. Logo,

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0 q}{q} + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}}.$$

Usando o mesmo raciocínio para a fração q/r_0, teremos um único par de inteiros a_1 e r_1 tais que $q = a_1 r_0 + r_1$, com $r_1 < r_0 < q$, o que nos leva a $\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}$. Logo,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}}.$$

Usando o mesmo tratamento para a fração r_0/r_1, e assim sucessivamente, teremos:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Isso mostra que todo número racional possui uma representação em fração contínua que lhe é equivalente. Os números a_i, com $i = 0, 1, ..., n$, são chamados de **elementos** da fração contínua, os quais podem ser organizados na forma $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ para representar a fração contínua na, assim chamada, **notação simplificada**. As propriedades dos números racionais permitem mostrar que todo número racional possui uma expansão em fração contínua com um **número finito de elementos** (ou seja, um número finito de somas e divisões), como pode ser visto em Moreira [2]. Por outro lado, os números irracionais requerem um **número infinito de elementos** para serem representados em frações contínuas, isto é, a fração contínua será do tipo $[a_0; a_1, a_2,...]$, conforme mostrado por Moreira [2].

Estamos particularmente interessados em obter a fração contínua equivalente a um irracional do tipo $r + \sqrt{s}$, com r e s naturais e $s \neq m^2$ ($m \in \mathbb{N}$), assim como em obter o irracional $r + \sqrt{s}$ a partir da sua representação em fração contínua infinita.

Para tal, comecemos com uma tarefa mais simples, qual seja obter a fração contínua equivalente a $\sqrt{n}$ para o caso em que n e um número natural ($n > 0$) porém $n \neq m^2$ ($m \in \mathbb{N}$), ou seja, um número irracional quadrático. Conforme discutido por Carneiro [3], isso pode ser feito seguindo-se um algoritmo bastante simples. Tomemos como exemplo o número $\sqrt{3}$. Observe que 3 pertence ao intervalo aberto (1, 4), cujos extremos são quadrados perfeitos. Assim, $1^2 < (\sqrt{3})^2 < 2^2$ e, conseqüentemente, $1 < \sqrt{3} < 2$. Portanto, $\sqrt{3}$ pode ser escrito na forma $1 + u$, onde u é algum número irracional positivo e menor que 1. Ou seja:

i) Existe um número $v > 1$ tal que $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{v}$. Logo $v = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, o que nos permite acrescentar que $v < 2$. Usando este fato, podemos escrevê-lo como $1 + \frac{1}{y}$, com $y > 1$. Assim, $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{y}$, o que implica que $y = \sqrt{3} + 1$. Desta forma, $2 < y < 3$.

ii) Podemos escrever y como $2 + \frac{1}{z}$, com $z > 1$, logo $\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{z}$, o que implica em z ser igual a $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, que é o v do passo i), acima.

Note que este processo torna-se cíclico, indo do passo i) ao ii) e do ii) ao i), repetidamente. Isto fornece:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{v} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{z}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}}}},$$

ou seja, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2,...]$, a qual é uma fração contínua infinita. Note que ela é também **periódica**, pois os elementos (com exceção de a_0) aparecem de forma repetida (neste exemplo, dois a dois). De fato, pode-se mostrar que todo irracional quadrático possui representação em fração contínua infinita, porém periódica [1]. Vejamos como esta seqüência converge para $\sqrt{3}$ analisando os valores numéricos dos quocientes parciais (também chamados de convergentes), na Tabela 1. No-

Tabela 1.

Elementos somados	Quocientes parciais	Valor numérico
1	1	1
2	$1+\frac{1}{1}$	2
3	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$	$\frac{5}{3} = 1{,}666...$
4	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}$	$\frac{7}{4} = 1{,}75$
5	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$	$\frac{19}{11} = 1{,}727272...$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
∞	[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2,...]	1,73205080...

te que os resultados se aproximam do valor exato alternadamente por falta e por excesso, comportamento este característico das frações contínuas (ver demonstração na seção 10 da Ref. [1] e na Ref. [4]).

Embora a convergência não seja tão rápida quanto a fornecida por outros métodos numéricos mais complexos, o algoritmo é bem simples e sempre fornece uma representação periódica para $\sqrt{n}$ quando esta raiz não é exata. Pode-se mostrar, inclusive, que, quando n for do tipo $m^2 + 1$ ou $m^2 - 1$ ($m \in \mathbb{N}$), a representação em fração contínua de $\sqrt{n}$ será $\left[m;\overline{2m}\right]$ e $\left[m-1;\overline{1,2(m-1)}\right]$, respectivamente [3].

Vejamos, agora, como obter o número irracional $r + \sqrt{s}$, com r e s racionais, correspondente a uma dada fração contínua periódica. Tomemos como exemplo um caso interessante, devido a aspectos de convergência, que é o da fração contínua que representa o número irracional Φ (proporção áurea), o qual foi discutido em detalhes em um artigo recente da Física na Escola [5]. Observe, na Tabela 2, os valores numéricos dos quocientes parciais.

Tabela 2.

Elementos somados	Quocientes parciais	Valor numérico
1	1	1
2	$1+\frac{1}{1}$	2
3	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$	$\frac{3}{2}=1{,}5$
4	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$	$\frac{5}{3}=1{,}666...$
5	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$	$\frac{8}{5}=1{,}6$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]	$\frac{89}{55}=1{,}6181818...$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
∞	[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]	1,6180339887...

Note que as frações obtidas na coluna da direita são exatamente as razões F_n/F_{n-1}, $n \geq 2$, entre dois números consecutivos da "seqüência de Fibonacci", a qual recebeu especial atenção por parte da Dona Fifi [5]. Lembremos que essa seqüência é definida de forma recursiva, tomando-se $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall\, n > 2$. Note que a convergência é lenta, fato já observado por Dona Fifi quando ela afirma que "talvez o número Φ seja o mais irracional dos números irracionais" [5], referindo-se justamente à lentidão com que os quocientes parciais se aproximam de Φ, cujo valor exato com dez casas decimais é dado na última linha da Tabela 2. Usando a fórmula recursiva para a seqüência de Fibonacci, temos:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}} + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}},$$

e portanto, $\dfrac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}$.

Como $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$, então:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{F_{n-2}+F_{n-3}}{F_{n-2}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{F_{n-2}}{F_{n-3}}}}.$$

Novamente, podemos fazer $F_{n-2} = F_{n-3} + F_{n-4}$ e gerar mais um elemento da fração contínua, e assim sucessivamente, o que nos leva a:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots\cfrac{1}{1+1}}}}.$$

Tomando o limite $n \to \infty$ para a razão $\dfrac{F_n}{F_{n-1}}$, temos:

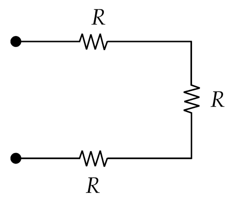
$$x = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}} = 1+\cfrac{1}{\underbrace{\boxed{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}_{=x}}.$$

Portanto, $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, ou, equivalentemente, $x^2 - x - 1 = 0$. Esta equação do 2° grau tem duas raízes reais: $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como $x > 0$, pois $\dfrac{F_n}{F_{n-1}} > 0$, $\forall\, n \geq 2$, então podemos desprezar a raiz negativa, restando $x = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Esta solução também pode ser escrita como $x = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{5}{4}}$, forma em que ficam evidentes os valores de r e s, os quais desejávamos obter.

Vejamos, agora, como podemos usar as frações contínuas para resolver o problema proposto no início deste artigo. Lembremos que a associação em série de duas resistências R_1 e R_2 leva a uma resistência equivalente $R_s = R_1 + R_2$, ao passo que a associação em paralelo leva a uma resistência equivalente R_p dada por $\dfrac{1}{R_p} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, ou seja, $R_p = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$.

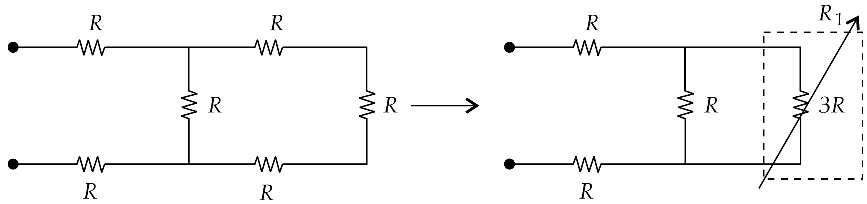
Montemos o circuito da Fig. 1 gradativamente. Chamaremos de R_n a resistência equivalente do circuito apresentado no n-ésimo passo. Assim:

1° passo:



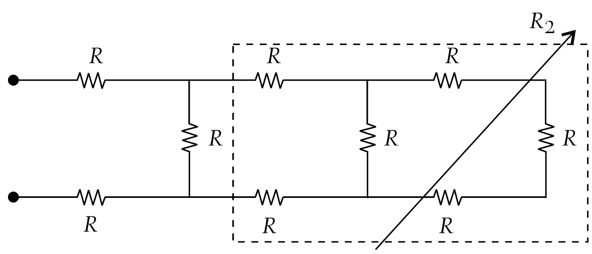
$R_1 = R + R + R = 3R$.

2° passo:



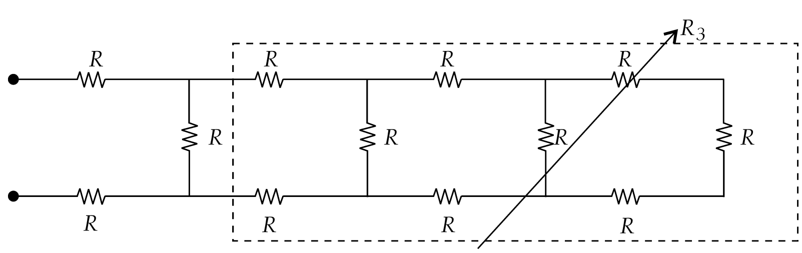
$$R_2 = R + R + \left(\frac{1}{1/R + 1/R_1}\right) = 2R + \frac{1}{1/R + 1/R_1}.$$

3° passo:



$$R_3 = R + R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}},$$ ou seja, $$R_3 = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}}}}.$$

4° passo:



$$R_4 = R + R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}}\right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}},$$ ou seja, $$R_4 = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}}}}}}.$$

n-ésimo passo:

Observando o padrão recursivo dos passos anteriores, temos:

$$R_n = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}}}.$$

Chamando de x o valor da resistência equivalente do circuito quando n tende ao infinito, temos que:

$$x = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \ddots}}}}} =$$

$$2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{\boxed{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \ddots}}}}}},$$

$$= x$$

logo $x = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{x}}$, o que nos leva a $x^2 - 2Rx - 2R^2 = 0$, que é uma equação do 2° grau com duas raízes reais. São elas $x = R\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$. Obviamente, x não pode ser negativo, o que nos obriga a escolher $x = R\left(1 + \sqrt{3}\right)$ como solução. Esta é a resistência equivalente desejada. Por fim, para escrever esta solução na forma de uma fração contínua, basta usar o resultado que obtivemos para $\sqrt{3}$ no início deste artigo, de modo que $\left(1 + \sqrt{3}\right) = \left[2;1,2,1,2,\ldots\right]$, o que nos permite escrever:

$$x = R.\left[2;1,2,1,2,\ldots\right] = \left[2;\overline{1,2}\right]R.$$

Referências

[1] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions* (Dover Science, New York, 1997).

[2] C.G. Moreira, Eureka! **3**, 43 (1998).

[3] J.P.Q. Carneiro, Revista do Professor de Matemática **34**, 36 (1997).

[4] N. Beskin, *Frações Contínuas* (Ed. Unijuí, Ijuí, 2001).

[5] M.E.G. Alencar (Dona Fifi), Física na Escola **5**(2), 4 (2004).