

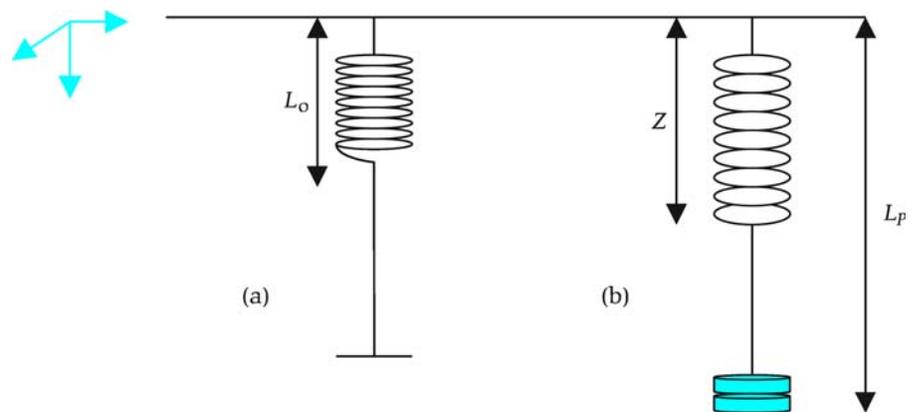


.....
Fernando Cachucho da Silva e
Paulo Batista Ramos
 e-mail: pbatista@fev.edu.br
 Fundação Educacional de Votuporanga

O sistema que investigaremos, conhecido como pêndulo elástico (veja Fig. 1), possui um comportamento bastante intrigante que exhibe uma riqueza muito grande de fenômenos raramente encontrada em sistemas tão simples.

Normalmente, em uma aula introdutória sobre movimento harmônico simples, um exemplo muito explorado é o de um sistema formado por um conjunto de pesos fixados em uma mola e que após uma perturbação inicial (alongação ou compressão vertical) começa a oscilar. Nesse caso, quando se coloca uma quantidade de pesos conveniente na mola, a oscilação se dá apenas na direção vertical e é causada pela elasticidade da mola que produz uma força restauradora. Quando o sistema é posto a oscilar, sua frequência natural de oscilação pode ser obtida sem maiores dificuldades. Infelizmente, pouco se chama a atenção, na maioria

dos livros-texto, sobre outros tipos de fenômenos que podem surgir (e frequentemente surgem mesmo!) sobre o tema em um laboratório didático de Física. Quando se varia a quantidade de pesos, podemos notar que o movimento de oscilação do sistema não permanece apenas na vertical. Além disso, para uma certa quantidade de pesos em particular, podemos notar que a oscilação da mola cessa por um breve instante de tempo e o sistema realiza um movimento típico de pêndulo. Pode-se também observar cuidadosamente a contínua troca de energia entre as oscilações verticais da mola e horizontais do pêndulo até que todo o sistema pára de oscilar. Na Tabela 1 mostramos os valores medidos para várias molas para os quais esta condição de ressonância é verificada. Para construir tal tabela, inicialmente determinamos os valores das constantes de elasticidade das molas consideradas, medindo a alongação da



Este artigo discute algumas características interessantes do chamado pêndulo elástico. Consideramos um regime, que pode ser obtido facilmente em um laboratório. À medida que se acrescenta pequenos pesos ao suporte, observou-se trocas de energias relativas aos movimentos de oscilação do tipo massa-mola na direção vertical e do tipo de pêndulo no plano. Realizamos algumas medidas simples que ilustram o fenômeno de ressonância.

Figura 1. Esquema do pêndulo elástico. Uma mola é fixada em um ponto e com a ajuda de um suporte, pesos são adicionados. Nos esquemas (a) e (b) são mostrados o comprimento da mola L_0 , a alongação Z que ocorre quando pesos são fixados na mola e o comprimento do pêndulo considerado L_p .

Tabela 1. Valores para molas onde a condição de ressonância é verificada.

L_0 (cm)	k (N/m)	M (g)	Z (cm)	L_p (cm)	$(f_o/f_p)^2 = kL_p/Mg$
4	17,8	116	9,3	24,6	3,9
5,5	95,1	567	10,0	23,6	4,0
5	43,4	268	11,0	24,4	4,0
6	72,6	405	10,6	22,2	4,1

Nas medidas acima, o suporte tem uma massa de 4 g e um comprimento de 14 cm. f_o e f_p representam as frequências naturais de oscilação do movimento do tipo massa-mola e do tipo de pêndulo, proporcionais a $(k/M)^{1/2}$ e $(g/L_p)^{1/2}$, respectivamente. Na última coluna são apresentados os valores aproximados de $(f_o/f_p)^2$. L_0 : comprimento da mola; k : constante de elasticidade; M : massa total; Z : distensão da mola e L_p : comprimento do pêndulo.

mola para várias massas fixadas a ela. Os valores da massa total do sistema, da distensão da mola e do comprimento do pêndulo apresentados na tabela são aqueles nos quais a troca de energia entre os movimentos de oscilação nas direções vertical e horizontal acontecem de maneira mais perceptível. É preciso comentar que para valores de massas próximos aos apresentados, o fenômeno também é parcialmente notado. Para valores muito afastados destes, tanto para cima como para baixo, outros tipos de comportamento são verificados. Para massas bem superiores às apresentadas, a frequência de oscilação diminui e todo movimento ocorre predominantemente na direção vertical. Para massas menores, a frequência aumenta mas o sistema não permanece oscilando apenas na direção vertical.

O sistema apresentado é extremamente sensível às condições iniciais. Na situação onde se pode observar de maneira mais nítida as trocas entre os movimentos de oscilação do tipo massa-mola na direção vertical z e do tipo de pêndulo no plano $x-y$, consideramos que o sistema era solto na vertical, a partir de uma elongação da mola z aproximadamente igual ao dobro do comprimento da mola L_0 , ou ainda quando não havia elongação alguma da mola, ou seja, quando z era igual ao próprio comprimento da mola. Nesta situação, o sistema oscilava e após algum tempo realizava o movimento de pêndulo simples no plano $x-y$ e depois retornava a oscilação do tipo massa-mola na vertical. Tais trocas de energia acontecem sucessivamente até todo o movimento

se extinguir.

Outro aspecto interessante a ressaltar é a obtenção de modos nos quais não ocorre esta troca de energia. Neste caso, a partir de uma condição inicial bem definida, estes modos podem ser obtidos e se apresentam praticamente estáveis. Na Fig. 2, ilustramos estes dois modos. O modo A pode ser obtido a partir de deslocamento do sistema da vertical com uma certa elongação da mola. Neste caso, podemos constatar que definindo as variáveis r e θ associadas ao movimento do tipo oscilador harmônico (massa-mola) e do tipo pêndulo, os dois movimentos se dão em fase. Ou seja, quando a elongação da mola é mínima o ângulo θ em relação a vertical também o é, e da mesma forma quando a elongação da mola é máxima, o sistema também se desvia o máximo da vertical. No modo B, as oscilações se dão fora de fase. Quando a elongação da mola é mínima (má-

xima) o desvio da vertical é máximo (mínimo).

Como já afirmamos, o sistema é altamente sensível às condições iniciais, revelando movimentos difíceis de serem descritos de forma simples na maior parte das vezes. Nas condições especificadas na Tabela 1, e com as condições iniciais a fim de obter os modos A e B, é possível realizar medidas aproximadas das frequências de oscilação dos dois modos. Considerando agora a situação inicial, onde o sistema é posto a oscilar na vertical com amplitude mínima, observamos sucessivas trocas de energia entre os movimentos do tipo pêndulo e do tipo massa-mola. A frequência com que ocorre esta troca de energia é aproximadamente igual a diferença entre as frequências dos modos A e B: $f_A - f_B$. Neste caso, o sistema se comporta aproximadamente de maneira análoga ao comportamento de um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados. Na Fig. 3 são apresentados os gráficos resultantes do comportamento da elongação da mola r e do ângulo θ em relação à vertical para alguns valores medidos. Realizamos pequenos filmes dos movimentos encontrados nos modos A e B, e da situação representada pela Fig. 3, onde ocorre a troca de energia entre os movimentos de pêndulo e massa-mola¹. Um excelente exercício de investigação é comparar o movimento do sistema neste último filme com o mapeamento realizado a partir

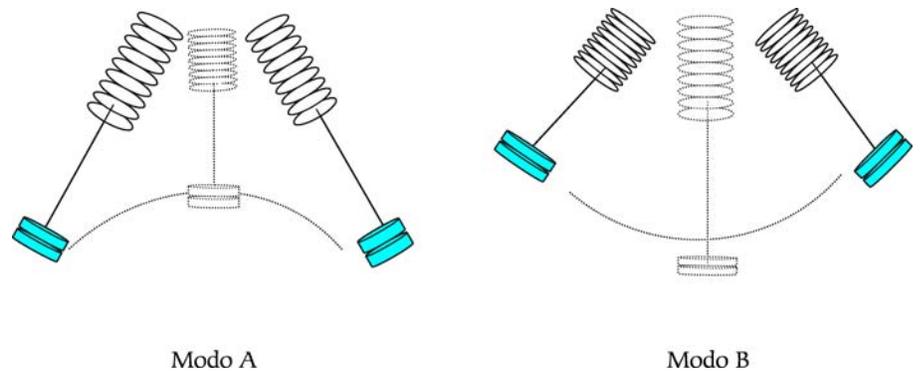


Figura 2. Modos normais de oscilação A e B. O modo A realiza um movimento pulsante no plano $x-y$ e é obtido a partir da condição inicial onde a distensão da mola é máxima e o sistema posto a oscilar fora do eixo vertical, enquanto o modo B realiza um movimento do tipo pêndulo no plano $x-y$ e é obtido a partir de uma distensão mínima da mola quando o sistema é posto a oscilar fora do eixo vertical.

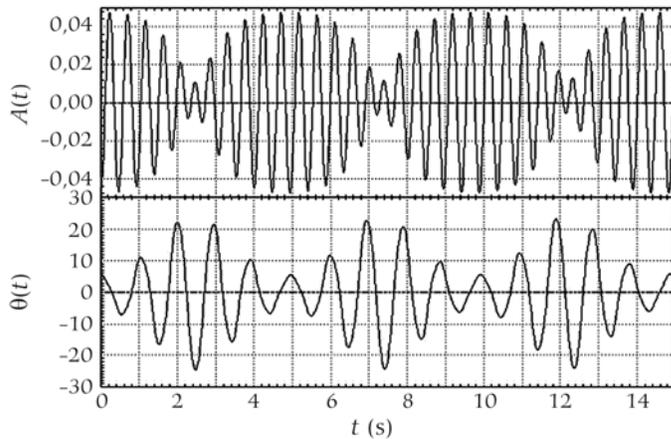


Figura 3. Comportamento da elongação da mola e do deslocamento angular do pêndulo elástico quando solto da vertical. Inicialmente o pêndulo foi solto na vertical com a mola comprimida. Nesta situação, realizamos as medidas para a mola de constante elástica $k = 73 \text{ N/m}$. Os modos de oscilação A e B, tiveram frequências medidas de aproximadamente 1,2 Hz (18 oscilações em 15 s filmados) e 1,0 Hz (15 oscilações em 15 s filmados), respectivamente.

das medidas descritas na Fig. 3. É possível notar que nos 15 s filmados ocorrem três trocas de energia perce-

bidas pelos deslocamentos angulares máximos observados aproximadamente em 3 s, 8 s e 12 s. Nos tempos

aproximadamente de 5 s, 10 s e 15 s, o sistema retoma sua oscilação na direção vertical. Na situação analisada, as oscilações do tipo massa-mola acontecem com uma frequência aproximadamente duas vezes maior que as oscilações do tipo pêndulo.

Diante da riqueza e da beleza dos fenômenos que surgem neste experimento tão simples, acreditamos que este possa ser trabalhado de uma maneira extremamente motivadora e desafiadora com estudantes em diferentes níveis de aprendizado².

Nota

¹Estes filmes podem ser encontrados no sítio www.unifev.edu.br/fisica na sala de experimentos de oscilações e ondas.

²No sítio http://www.maths.tcd.ie/~plynch/SwingingSpring/SS_Home_Page.html há uma lista de referências sobre o tema e experiências virtuais.

Semana Nacional de Ciência e Tecnologia

16 a 23 de outubro de 2006

Criatividade
& Inovação

Vídeos e filmes científicos | Festivais e feiras de ciência | Oficinas, palestras e cursos de extensão | Exposições de ciência e tecnologia | Atividades de cultura, ciência e arte | Planetários e observações astronômicas | Cientistas nas escolas e debates públicos | Trem, barco da ciência e excursões científicas | Programação especial em jornais, rádios e TV's | Portas abertas em instituições de pesquisa e universidades

www.mct.gov.br
<http://semanact2006.mct.gov.br>
 (61) 3317.7826 • (21) 2555.0736

Coordenação
 Ministério da
 Ciência e Tecnologia