Problemas Olímpicos

Soluções dos problemas anteriores

1 Cálculo da força gravitacional de uma casca esférica de raio interno R_1, raio externo R_2 e massa M.

O volume de uma esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

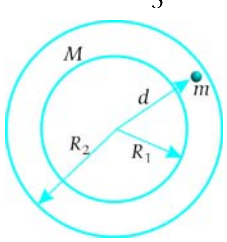
A densidade da massa m é dada por:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho . V.$$

Portanto, a massa é diretamente proporcional ao cubo do raio R:

$$m = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow m \propto R^3$$

Para uma massa esférica como a da figura abaixo, o volume da casca vale o volume total, $V_T = \frac{4}{3}\pi R_2^3$ menos a parte oca, $V_o = \frac{4}{3}\pi R_1^3$.



Assim,

$$V = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3).$$

Logo, a massa da casca esférica é

$$m \propto (R_2^3 - R_1^3)$$

Aplicando esse raciocínio para o problema dado, temos:

Para massa m_1: $m_1 \propto (d^3 - R_1^3)$ (m_1 é a porção da massa M que atrai m).

Para a massa M: $M \propto (R_2^3 - R_1^3)$.

Dividindo as expressões temos:

$$m_1 = M\frac{(d^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

Como a força gravitacional vale: $F = G\frac{m\,m_1}{d^2}$, temos:

$$F = G\frac{m\,M}{d^2}\frac{(d^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)}.$$

2 Variações no campo gravitacional na superfície da Terra podem advir de irregularidades na distribuição de sua massa.

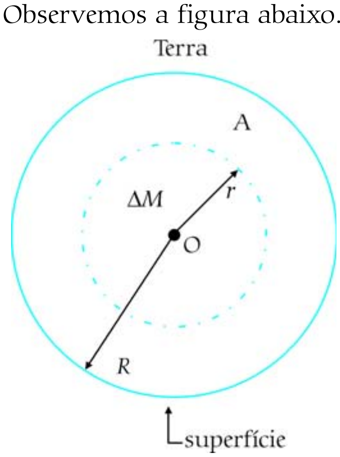
Vamos determinar a intensidade do campo gravitacional para pontos internos à Terra. Vamos supor que:

a) A Terra é esférica e homogênea;

b) Toda a massa da Terra esta concentrada no seu centro geométrico (centro de massa);

c) Que a Terra esteja isolada do universo.

Observemos a figura abaixo.



O campo gravitacional em A é devido à porção da massa ΔM da esfera de raio r com o centro O. Seja ρ a densidade da Terra. Como a Terra é homogênea, a densidade (ρ) da porção da massa ΔM é:

$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V},$$

onde ΔV é o volume da esfera de raio R. Logo,

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Assim,

$$\rho = \frac{\Delta M}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow g = G\frac{\Delta M}{r^2}, \text{ e}$$

$$\Delta M = \rho\frac{4}{3}\pi r^3.$$

De

$$g = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} \Rightarrow g = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi G\rho\right)}_{\text{constante } k} r,$$

concluímos que para pontos internos à Terra, a intensidade do campo gravitacional é diretamente proporcional à distância r até o centro da Terra. Para o problema em questão, analisaremos duas situações:

1ª) calcularemos o campo da cavidade $g_2 = k(R - a)$.

2ª) O campo em P devido a toda a distribuição de massa é: $g = k\,R$.

Portanto, temos:

$$\frac{kR - k(R - a)}{kR} = \frac{a}{R}$$

3 O alcance de um corpo lançado segundo um ângulo e que recebe do vento uma força horizontal constante.

Na direção vertical, para que o corpo atinja o ponto mais alto da trajetória, temos:

$$V_y = V_{0y} - g\,t \;\Rightarrow V_y = 0 \Rightarrow$$
$$V_{0y} = V\,\text{sen}\alpha$$

Portanto,

$$t_y = \frac{V\,\text{sen}\alpha}{g} \qquad (1)$$

é o tempo de subida. Logo, o tempo total de subida e descida é:

$$d = 2\,\frac{V\,\text{sen}\alpha}{g} \qquad (2)$$

Na direção horizontal, temos a força do vento (**F** = constante) e

$$d = V_{0x}t + a_x\frac{t^2}{2}, \qquad (3)$$

onde

$$V_{0x} = V\cos\alpha \qquad (4)$$

e

$$a_x = \frac{F}{M}\,.$$

Substituindo (2), (4) e (5), na Eq. (3), temos:

$$d = V\cos\alpha\, 2\frac{V\,\text{sen}\alpha}{g} + \frac{1}{2}\frac{F}{M}\left(2\frac{V\,\text{sen}\alpha}{g}\right)^2$$

$$d = \frac{2V^2\,\text{sen}2\alpha}{g} + \frac{F}{2M}\,\frac{4}{g}\,V^2\,\text{sen}^2\alpha$$

$$d = \frac{V^2\,\text{sen}2\alpha}{g}\left(1 + \frac{F}{Mg}\,\text{tg}\alpha\right).$$

4 Avaliando um motor concebido por um inventor a partir das premissas propostas. Sejam T_Q e T_F as temperaturas das fontes quente e fria, respectivamente.

Inicialmente, temos que:

T_Q = 1400 + 273 = 1673 K é a temperatura mais alta do ciclo.

T_F = 300 + 273 = 573 K é a temperatura mais baixa do ciclo.

Para o ciclo de Carnot podemos escrever que:

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{Tg - Tf}{Tg}.$$

é o rendimento teórico. Assim:

$$\eta_{\text{Max}} = \eta_{\text{Carnot}} = \frac{1673 - 573}{1673} = 0.658.$$

Calculamos o trabalho útil usando a relação:

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{W_{\text{útil}}}{Q_{\text{absorvido}}},$$

$$0{,}658 = \frac{W_{\text{útil}}}{4500} \Rightarrow W_{\text{útil}} = 2961 \text{ kcal}.$$

que é o trabalho útil por hora de funcionamento do motor térmico. Portanto, a potência útil será:

$$P_{\text{útilmax}} = \frac{W_{\text{útil}}}{\Delta t} = \frac{2961 \times 4{,}18 \times 1000}{3600},$$

$$P_{\text{útilmax}} = 3438 \text{ W},$$

que, transformado para Cavalo Vapor (CV), dá:

$$P_{\text{útilmax}} = \frac{3438}{736},$$

$$P_{\text{útilmax}} = 4{,}67 \text{ CV}.$$

Logo a máxima potência térmica é 4,67 CV.

O motor do inventor é impossível de ser construído, e portanto nenhum investimento deve ser feito nele.

Dulceval A. de Santana

Novos Problemas

1 Uma fonte DC de voltagem E_0 com resistência interna r está conectada a um dispositivo de resistência R_L.

i) Esboce a potência útil como função da corrente.

ii) Determine a resistência interna da fonte de voltagem

iii) Esboce: a) A potência total como função de R_L. b) A potência útil como função de R_L. c) A eficiência do circuito como função de R_L.

(V Olimpíada Internacional de Física - Bulgária)

2 É-lhe dado um líquido cujo calor específico é conhecido e um cristal que não se dissolve no líquido. Os seguintes aparelhos estão ao seu alcance: termômetro; tubo de ensaio; cronômetro e aquecedor elétrico. Determine o ponto de fusão e o calor específico do cristal.

(IX Olimpíada Internacional de Física - Hungria)

3 Uma barra longa cujo formato é um paralelepípedo de lados a, b e c ($a>>b$, $b>>c$) é feita do semicondutor InSb. Uma corrente I flui ao longo da barra na direção paralela ao lado a. A barra está sujeita a um campo magnético externo **B** que é paralelo ao lado c da barra. O campo magnético provocado pela corrente I pode ser desprezado. Os portadores de carga neste semicondutor são os elétrons. A velocidade média dos elétrons em um semicondutor na presença somente de um campo elétrico é $\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}$, sendo μ a mobilidade eletrônica.

Quando existe um campo magnético, o campo elétrico resultante não é mais paralelo a corrente. Este fenômeno é conhecido como efeito Hall.

a) Determine a magnitude e direção do campo elétrico na barra de modo a se obter a corrente I como descrito acima.

b) Calcule a diferença de potencial elétrico entre dois pontos opostos na superfície da barra ao longo da direção dos lados b.

c) Ache uma expressão analítica para o componente DC da diferença de potencial elétrico no item anterior, se a corrente e o campo magnético forem AC, *i.e.*: $I = I_0\,\text{sen}(\omega t)$ e $B = B_0\,\text{sen}(\omega t + \delta)$

d) Usando o resultado de c) desenhe e descreva um circuito elétrico que seja capaz de medir consumo de potência de um aparelho elétrico conectado a uma rede AC.

Dados: mobilidade eletrônica no InSb = 7,8 $\text{mV}^{-1}\text{s}^{-1}$. concentração de elétrons no InSb = 2,5 $\times 10^{22}/\text{m}^3$. I = 1,0 A, **B** = 0,10 T, b = 1,0 cm, c = 1,0 mm, carga do elétron $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

(XVI Olimpíada Internacional de Física - Portoroz, Iugoslávia)