Experiências com a Braquistócrona

Graciliano da Silveira Batista, Cleuton Freire e **José Evangelista Moreira**
Seara da Ciência, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza

Um objeto deslizando por uma rampa inclinada leva um certo tempo para atingir o ponto mais baixo. Qual deve ser a forma da rampa para que esse tempo seja mínimo? Desde os tempos de Isaac Newton sabe-se que a curva de tempo mínimo, a "braquistócrona", é uma ciclóide invertida. Nesse trabalho, descreve-se um experimento interativo simples que ilustra esse fato comparando os tempos de descida por três rampas, uma reta, outra na forma de uma ciclóide e uma terceira seguindo uma hipérbole. O experimento pode ser feito sem dificuldade até em sala de aula. O tratamento teórico do problema é discutido e o contexto histórico é mencionado.

Introdução

Em Julho de 1696, na revista Acta Eruditorium, fundada e mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz, o matemático suíço Jean Bernouilli apresentou um problema que logo despertou o interesse de seus colegas. Tratava-se de achar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória.

Leibniz espalhou o problema enviando-o por carta aos maiores matemáticos da época. A solução foi rapidamente encontrada por vários deles, inclusive o próprio Leibniz, além de Isaac Newton e os irmãos Jacques e Jean Bernouilli. Todos indicaram que a curva mais rápida, ou braquistócrona (*brakhisto* = mais ligeiro, *chronos* = tempo), deveria ser uma ciclóide.

A ciclóide é uma curva muito interessante e já foi até chamada de Helena da Geometria, em alusão à famosa beldade que levou Tróia a seu trágico destino.

No século 16, vários matemáticos, dentre eles Galileu, estudaram a ciclóide, que é a curva traçada por um ponto qualquer da borda de uma roda que rola sem deslizar por um plano horizontal (Fig. 1).

Sendo R o raio da roda, a ciclóide é descrita pelas equações paramétricas:

$$x = R\,[t - \mathrm{sen}\,(t)]$$
$$y = R\,[1 - \cos(t)], \qquad (1)$$

ou, eliminando o parâmetro t,

$$x = R \arccos \frac{R-y}{R} - \sqrt{2Ry - y^2}. \qquad (2)$$

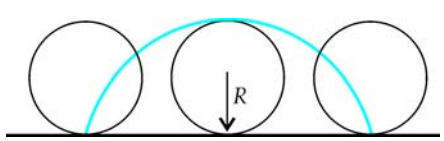

Figura 1. Traçado de uma ciclóide.

Portanto, a forma da rampa correspondente a uma braquistócrona deve ser um trecho da ciclóide invertida tendo o ponto mais alto A com tangente vertical, como mostra a Fig. 2. Para qualquer outra forma de rampa entre os mesmos pontos inicial e final, o tempo gasto deve ser maior do que o tempo gasto através da ciclóide.

Christiaan Huygens, patrono dos relojoeiros e contemporâneo dos matemáticos já citados, mostrou que a ciclóide também é uma tautócrona ("curva de mesmo tempo"). Isto é, partículas soltas do repouso a partir de pontos de alturas diversas (A_1, A_2, etc) chegam ao mesmo tempo no ponto mais baixo, B, embora com velocidades diferentes. Portanto, a ciclóide ainda merece outra denominação, pois é uma isócrona, já que partículas soltas de qualquer ponto oscilam em torno do ponto mais baixo com o mesmo período. Um problema

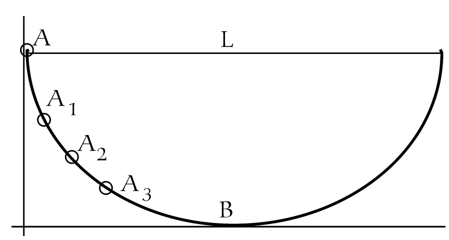

Figura 2. A ciclóide invertida é uma tautócrona.

interessante consiste em mostrar que esse período comum é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

onde L é a "flecha" da ciclóide (Fig. 2).

A demonstração formal de que a ciclóide é a curva de tempo mínimo é um problema clássico do cálculo das variações e pode ser encontrado nos livros-texto de mecânica teórica [1]. Historicamente, o cálculo das variações foi inventado por Euler e Lagrange exatamente para resolver o problema da tautócrona. Um problema típico de cálculo das variações caracteriza-se pelo fato de buscar uma função (no nosso caso, a forma da rampa) que maximiza ou minimiza uma variável (nesse exemplo, o tempo de trajetória), levando em conta alguns vínculos (aqui, deslizamento sob a ação da gravidade).

Para começar, observamos que a velocidade da partícula em um ponto qualquer da rampa é dada por:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}. \qquad (3)$$

E, como $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$, obtemos:

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{y}}\,\mathrm{d}x. \qquad (4)$$

Queremos que esse tempo t seja mínimo. Observe que a variável, no caso, é toda a curva $y(x)$. Resolvendo esse problema com o auxílio do método de Euler e Lagrange, a solução é, como já foi dito, uma ciclóide.

É claro que as soluções fornecidas pelos pioneiros citados acima não usavam o cálculo das variações, que ainda não fora inventado. A solução de Jean Bernouilli, o mesmo que lançou o problema, tornou-se um clássico da literatura matemática por sua engenhosidade e por usar um resultado obtido anteriormente por Fermat no estudo da refração da luz.

O problema considerado por Fermat consistia em saber qual o caminho escolhido por um raio de luz entre dois pontos situados em meios de índice de refração diferentes. Como não podia deixar de ser, Fermat verificou que esse caminho era dado pela conhecida Lei de Snell da refração:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2. \qquad (5)$$

Em sua analogia com o problema da refração, Bernouilli considerou uma sucessão de camadas com índices de refração decrescentes, $n_1 > n_2 > n_3, \ldots$, como visto na Fig. 3. Uma situação análoga é encontrada na explicação usual do fenômeno das miragens. Usando a Lei de Snell e lembrando que $n = c/v$, onde c e v são a velocidade da luz no vácuo e no meio transparente, respectivamente, obtemos:

$$\frac{v_1}{\operatorname{sen}\theta_1} = \frac{v_2}{\operatorname{sen}\theta_2} = \ldots = \frac{v}{\operatorname{sen}\theta} = A = \text{const.} \qquad (6)$$

Isso deve ser válido mesmo quando a espessura das camadas tende a zero, com variação contínua do índice de refração. Portanto, para um pequeno trecho qualquer da trajetória, devemos ter:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}L} \quad \text{e} \quad \frac{v}{\operatorname{sen}\theta} = A = \frac{v\,\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}.$$

Logo:

$$v^2 (\mathrm{d}L)^2 = A^2 (\mathrm{d}x)^2. \qquad (7)$$

Usando $(\mathrm{d}L)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$, obtemos:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{A^2 - v^2}{v^2}. \qquad (8)$$

No nosso caso, temos uma partícula que desliza sob a ação da gravidade. Portanto, a velocidade v em uma posição qualquer y é dada por:

$$v = \sqrt{2gy}. \qquad (9)$$

Usando esse valor de v na expressão (8), obtemos:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{\frac{A^2}{2g} - y}{y}. \qquad (10)$$

Como o lado esquerdo dessa equação deve ser positivo, devemos ter:

$$y_{max} = \frac{A^2}{2g}. \qquad (11)$$

Esse valor corresponde ao ponto mais baixo da rampa e, no caso das miragens, é o ponto onde a trajetória da luz passa de descendente a ascendente.

Por fim, Bernouilli mostrou que a solução da Eq. (10) é exatamente uma ciclóide. O leitor poderá, com menor trabalho, fazer o caminho inverso e verificar que a função que descreve a ciclóide (Eq. 1) satisfaz a equação diferencial (10).

Experiência

A demonstração experimental de que a ciclóide é realmente uma braquistócrona tem os ingredientes requeridos de um bom experimento didático: é surpreendente, simples de montar e rápida de executar. Para uso permanente no Salão de Exposições da Seara da Ciência da UFC, montamos o equipamento visto na Fig. 4.

Consta de três rampas por onde podem rolar pequenas esferas de aço com cerca de 1 centímetro de diâmetro. Uma das rampas é reta, outra tem a forma de uma ciclóide invertida e a terceira é uma hipérbole. Um texto colocado ao lado do equipamento convida o visitante a adivinhar, antes de fazer a experiência, qual das três esferas cai mais ligeiro. Ele pode ver que a reta é o caminho mais curto e a hipérbole é a curva mais íngreme. Vê também que a rampa em forma de ciclóide tem uma pequena parte que fica abaixo do nível do ponto final. As esferas são colocadas nos pontos mais altos de cada rampa, seguras por

Figura 3. Trajetória de um raio de luz em um meio de índice de refração variável.

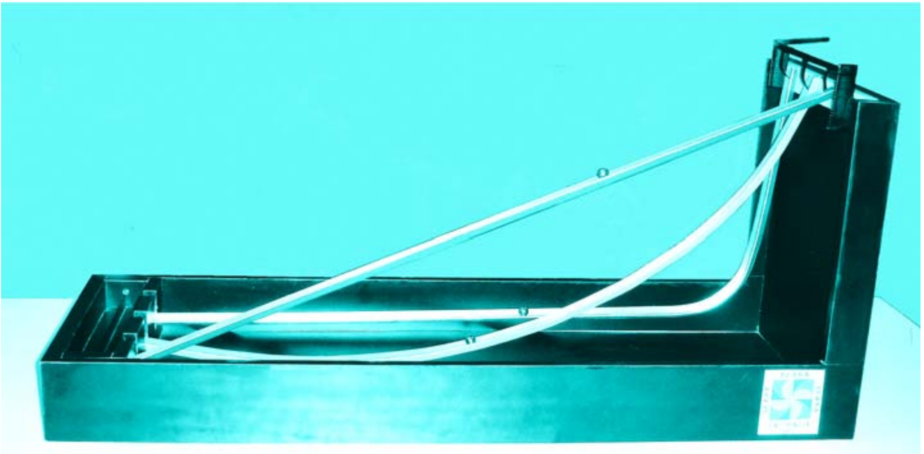

Figura 4. Rampas para demonstração da braquistócrona.

Tabela 1. Tempos (em segundos) de descida de uma esfera em diversas curvas.

Forma da rampa	Teórico	Experimental
Reta	0,690	0,82
Hipérbole	0,650	0,74
Ciclóide	0,544	0,64

um mecanismo simples de mola e liberadas simultaneamente por uma alavanca. A esfera que desce pela ciclóide chega primeiro ao fim da rampa e atinge uma cantoneira de alumínio em forma de L que gira ao ser atingida, separando a esfera mais rápida das outras duas.

O visitante também é convidado a soltar duas esferas de alturas diferentes na rampa em forma de ciclóide e comprovar que ambas chegam ao mesmo tempo no ponto mais baixo da rampa, demonstrando que a ciclóide é uma tautócrona.

O equipamento colocado no Salão de Exposições é elaborado demais para uso em sala de aula como demonstração. Para atender a essa finalidade, fizemos uma montagem mais simples, barata e portátil, vista na Fig. 5. Em uma prancha de madeira são fixados três trilhos de alumínio, do tipo usado em molduras. Cada um é dobrado na forma de uma das três curvas, reta, hipérbole e ciclóide. As pequenas esferas são mantidas por um dispositivo de mola nos pontos mais altos das curvas e liberadas ao mesmo tempo. Com o plano da prancha na vertical, o tempo de queda é muito curto e fica difícil observar qual das esferas chega primeiro. Pode-se, então, repetir a experiência com a prancha inclinada, diluindo a aceleração e facilitando a observação. Essa variação possibilita que o professor chame a atenção para o fato de que o resultado independe do valor da aceleração da gravidade. O experimento, se feito na Lua, teria o mesmo desfecho.

Usando a expressão (4), podemos calcular o tempo de descida da esfera em qualquer curva. No nosso equipamento, mostrado na Fig. 4, a altura das rampas é de 32 cm e o comprimento na horizontal é de 87 cm. Os tempos teóricos de queda para as três curvas foram obtidos integrando numericamente a expressão (4) para as funções respectivas. Os tempos experimentais foram medidos com o uso de sensores no início e no fim de cada curva, ligados a um cronômetro eletrônico. Esses valores estão listados na Tabela 1. Essa comparação numérica entre a teoria e a experiência é apenas ilustrativa, pois o cálculo pressupõe o deslizamento de uma partícula puntiforme na ausência de atrito. Na nossa experiência, usamos esferas rolantes e o atrito é inevitável. A diferença entre a previsão teórica e a medida experimental, em torno de 15%, é perfeitamente justificável.

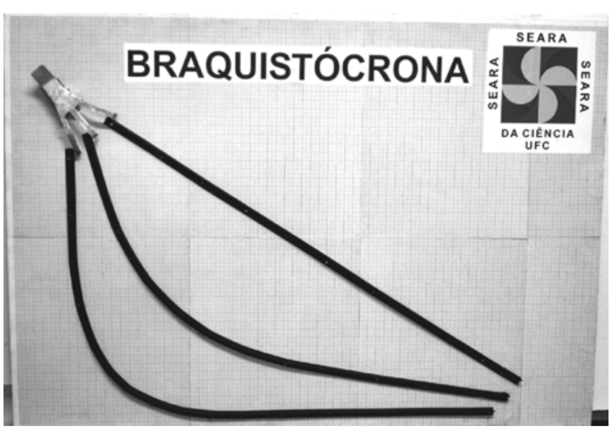

Figura 5. Prancha portátil para demonstração em sala de aula.

Conclusão

Embora trate de um problema antigo e bem conhecido [2, 3], a demonstração experimental da braquistócrona ainda surpreende as pessoas que a vêem pela primeira vez. O professor pode, com facilidade, fazer essa demonstração em sala de aula e chamar a atenção de seus estudantes para as várias e curiosas propriedades da ciclóide. Uma discussão detalhada da solução de Jean Bernouilli remete a uma interessante comparação com um problema clássico da óptica geométrica e seu tratamento dado por Fermat.

Para alunos com gosto pela Matemática, o problema serve muito bem para apresentar o cálculo das variações e o método de Euler-Lagrange. Por fim, deve ser salientada a importância histórica do problema e a forma como foi solucionado pelos grandes matemáticos do século 17, aproveitando para comentar como a forma de propor e solucionar questões de Ciência naquela época era bastante diverso da prática nos dias atuais.

Referências

[1] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Co, Cambridge, 1951).

[2] J. Supplee and F.W. Schmidt, *American J. of Physics* **59**, 402 (1991).

[3] M. Desaix, D. Anderson e M. Lisak, *European J. of Physics* **26**, 857 (2005).