

A Ciência da Complexidade

.....
Rita M.C. de Almeida

Instituto de Física, Universidade
Federal do Rio Grande do Sul,
Porto Alegre, RS
e-mail: rita@if.ufrgs.br
.....

A Ciência, bem antes da Complexidade, representou um avanço significativo para a humanidade. Isto porque podemos pensar a Ciência como o mais eficiente método de se obter conhecimento.

Antes do método científico, introduzido por Galileu (1564-1642), entre os critérios para aceitação da validade de uma teoria, hipótese ou suposição, estava o critério da Autoridade, segundo o qual a teoria deveria ou não ser aceita dependendo de quem a propunha ou defendia. Resumidamente, Galileu propôs que, deixando de lado o critério da Autoridade, se fosse indagar diretamente à Natureza se a teoria era correta ou não. Em outras palavras, que se fizessem experimentos para verificar a veracidade das previsões da teoria. E propôs um método pelo qual estes experimentos fossem conclusivos e repetíveis por outros investigadores. Isso soa mais como uma questão de bom senso do que como uma revolução no pensamento científico. No entanto, esse bom senso punha em cheque autoridades da época, como a Igreja Católica. E incitava pensamento independente, criatividade, críticas, tudo aquilo que leva à rebeldia.

Galileu propôs que, deixando de lado o critério da Autoridade, se fosse indagar diretamente à Natureza se a teoria era correta ou não. Em outras palavras, que se fizessem experimentos para verificar a veracidade das previsões da teoria

nos avanços da Ciência como um todo. Quais as condições sociais e materiais que possibilitaram a vitória do Iluminismo é uma questão longe de estar fechada, mas que um mínimo de liberdade de pensamento e expressão foram necessárias, está fora de cogitação [1].

Como oposto ao método científico de obtenção de conhecimento, podemos encontrar formas diversas em que metáforas não justificadas propõem algumas maneiras de como sistemas naturais ou todo o Universo funcionam. Algumas destas explicações não são mais aceitas hoje em dia devido à divulgação de resultados de investigações científicas e tecnológicas. Por exemplo, após as fotografias tiradas via satélite, poucas pessoas poderiam aceitar um modelo da Terra plana. Após a descoberta dos fósseis de dinossauros e da datação destes como tendo vivido há várias dezenas

de milhões de anos atrás, fica mais difícil acreditar que literalmente a Terra e o Universo tenham sido criados há apenas pouco mais que 6 mil anos.

A Ciência, como se desenvolveu até meados do século XX, conseguiu ex-

plicar muitos fenômenos que hoje poderiam ser descritos como não complexos, propondo modelos matemáticos analiticamente tratáveis. Fenômenos como organismos vivos, ecossistemas ou o funcionamento da mente humana revelaram-se muito complexos para que os tratemos da

Durante um longo período, a Ciência avançou modelando sistemas naturais que podem ser descritos com poucas variáveis ou propondo descrições - mas não explicações - para fenômenos mais complexos. Neste artigo discutimos como a ampla disseminação de recursos numéricos poderosos através de computadores pessoais possibilitou o desenvolvimento e investigação de modelos matemáticos através dos quais é possível modelar fenômenos naturais onde i) o detalhe determina a evolução do sistema, tornando imprescindível a descrição do sistema através de muitas variáveis e ii) onde indeterminismo aparente pode ser modelado.

mesma maneira. Eles apresentam qualidades como não linearidade, dependência crítica das condições iniciais, amplificação por retro-alimentação, etc., que tornam a solução analítica muito difícil, senão impossível. Na verdade, certas qualidades globais destes sistemas, como a dependência forte nos detalhes de sua história, ou a imprevisibilidade operacional do seu comportamento, levaram muitos pensadores a concluir que, nesses casos, uma explicação do seu comportamento através de uma teoria geral seria impossível e tudo o que se poderia fazer seriam classificações taxonômicas. Aristóteles dizia que “a Ciência termina onde começa a natureza”.

Assim, durante um longo período de tempo, sistemas complexos, que apresentam diferenças qualitativas em relação àqueles sistemas que são solúveis analiticamente, permaneceram sem uma modelação matemática adequada. Na falta disso, metáforas foram tentadas e algumas delas pareciam explicar melhor tais fenômenos. Explicações mágicas da Natureza em que holismos, propósitos e consciências bem ou mal intencionadas são introduzidos, foram apresentadas como mais eficientes na explicação da Natureza. Talvez naquela data assim o parecessem. Em todo o caso, elas nunca passaram pelo teste de uma verificação mais rigorosa [2].

Hoje, com o advento de computadores suficientemente rápidos, tais sistemas já podem ser modelados, pelos menos em suas formas mais simples, e muitos resultados têm sido obtidos. O surpreendente é que as bases científicas são as mesmas, isto é, nenhuma lei da Física foi desrespeitada, reescrita ou reinterpretada. O que aconteceu é que equações que já haviam sido propostas estão sendo agora resolvidas e suas soluções apresentam resultados inesperados. E, ainda, tais soluções incentivaram novas descrições, possibilitaram novos pontos de vista, que, por sua vez, geraram novos resultados. Na realidade, a Ciência da Complexidade não é uma nova Ciência, mas sim novos resultados para a mesma Ciência Natural. Por outro lado a Matemática sim, que

não é uma Ciência Natural, pode gerar novas fronteiras, como por exemplo a geometria fractal [3].

O complexo vs. o simples: Maneiras de comprimir a informação

Uma maneira possível de se apresentar a Ciência é considerar que a Natureza nos fornece uma infinidade de dados através de nossas percepções, com ou sem o auxílio de aparelhos de medida, os quais são classificados e então são extraídas previsões. A priori, não temos como ter certeza de que os acontecimentos que se sucedem diante de nós estejam de alguma forma correlacionados. No entanto, depois de haver deixado cair várias vezes o bico no chão, mesmo um bebê chega à conclusão de que, quando o bico é solto, ele cai. Assim, o ser humano está dotado com esta capacidade de inferir leis de causalidade a partir de exemplos repetidos de fenômenos naturais. O método científico consiste em uma maneira eficiente de testar a natureza para verificar se as inferências, as hipóteses levantadas, são corretas e se suas conseqüências (previsões) se confirmam.

Quando uma teoria é aceita, isto significa que nós podemos prever o resultado de um experimento antes de realizá-lo e, se a nossa fé no modelo é forte, nem precisamos realizar o experimento. Ou então, até arriscamos a nossa vida apostando no resultado do modelo, como o fazem as pessoas que, por exemplo, andam de avião. Isto necessariamente implica que a *informação foi comprimida*.

Como um exemplo concreto dessa compressão da informação, considere que estamos realizando um experimento em que entramos com um valor X de uma quantidade qualquer (por exemplo, a massa de um corpo) e obtemos o valor de uma quantidade Y (por exemplo, o peso do corpo). Os dados poderiam ser resumidos pela Figura 1.

Se não for feita nenhuma inferência sobre o fenômeno que estamos estudando, um novo experimento deve ser realizado para qualquer novo valor de X . E para cada valor de X ,

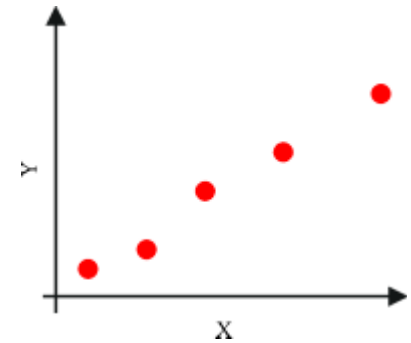


Figura 1. Gráfico representando as medidas conjuntas das variáveis Y e X

temos um valor de Y . Contamos com uma lista, uma tabela de valores de X e Y associados. Como os possíveis valores de X são infinitos, precisamos de uma tabela infinita! Mas existe alguma regularidade no gráfico apresentado acima; podemos aproximadamente descrever os pontos como pertencendo a uma reta (Figura 2).

A vantagem é que retas podem ser descritas por equações com duas constantes:

$$Y = aX + b \quad (1)$$

A partir do gráfico, pode-se encontrar os valores de a e b . Tendo estes valores, a partir de qualquer valor de X , pode-se então obter Y . Se o modelo estiver correto, não precisamos mais realizar o experimento para todos os X para obter o Y correspondente, basta usarmos a Eq. (1). Toda a informação contida na lista infinita fica agora *comprimida* nos valores das duas constantes a e b , mais o conhecimento que estes pontos são modelados por uma reta. O teste para este modelo seria então comparar a predição do valor de Y para um X ainda não

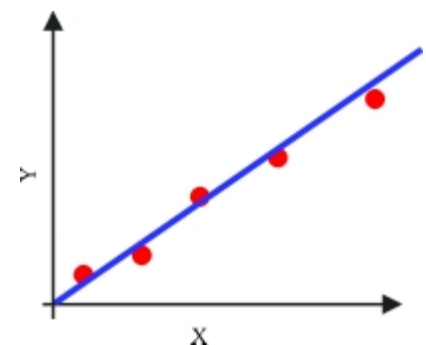


Figura 2. Gráfico onde uma reta é proposta como um modelo para descrever a correlação entre as variáveis Y e X .

experimentado com o resultado experimental (observe que uma teoria pode ser refutada por uma predição errada, mas uma predição correta não assegura que as futuras também o serão).

As teorias (ou modelos) da Natureza nunca são exatas. São sempre aproximações em que alguns fatores foram simplificados ou simplesmente desprezados. Se os efeitos destes fatores forem pequenos, dentro de uma margem de erro previamente estipulada como aceitável, o modelo ainda funciona. Por exemplo, na Figura 2, os pontos não caem exatamente em cima da reta, mas ainda assim a reta 'modela' o comportamento destes pontos. Outra maneira de se modelar seria procurar outra curva que passasse pelos pontos experimentais. Assim, o modelo destes pontos seria o conjunto de parâmetros necessários para determinar a curva, mais a especificação da curva (reta, parábola, etc.).

Este foi um exemplo simples. A Ciência está sempre procurando uma maneira matemática de comprimir a informação. Os fenômenos naturais podem ser muito complicados e sempre fica a dúvida se são ou não passíveis de uma modelação, isto é, se o número de constantes necessárias para encontrar a descrição matemática de um dado fenômeno não seria tão extensa quanto a lista dos dados de entrada e resultados experimentalmente obtidos. Por outro lado, poderia

o número destes parâmetros ser reduzido se uma curva mais adequada fosse considerada? Quais tipos de curvas estão disponíveis para o modelador? Na prática não são somente curvas, mas, de uma forma mais geral, sistemas dinâmicos

(receitas de como gerar as curvas) é quem são propostos como modelos.

Este ponto, se a Natureza é modelável ou não, é muito importante para a Ciência. Diferentes disciplinas discutem-no mais ou menos intensa-

mente. E à medida que o tempo vai passando, cada vez mais são propostas novas formas de se olhar para a Natureza, novas maneiras de se modelar, originárias de progressos na Matemática, e novas ferramentas de trabalho, viabilizadas pelo desenvolvimento de computadores pessoais. Assim, as informações contidas nas observações da Natureza são cada vez mais comprimidas em um conjunto (pequeno) de parâmetros, mais a especificação do tipo de sistema dinâmico que se está considerando.

O que possibilitou a modelação de sistemas mais complicados foi a ampliação drástica da 'biblioteca' de diferentes sistemas dinâmicos analisáveis disponíveis. Analisáveis significa que de uma maneira ou outra pode-se resolver estes sistemas dinâmicos (que são geralmente um conjunto de equações matemáticas) e classificar suas soluções. E são estas soluções que podem apresentar características surpreendentes, como fractalidade, dependência crítica das condições iniciais ou efeitos não lineares, isto é, pequenas mudanças nos parâmetros das equações provocando grandes mudanças nas soluções.

Essas soluções, obtidas para sistemas dinâmicos determinados por poucos parâmetros, podem ser bem complicadas. Este é um ponto interessante para a Ciência. Isto significa que

por trás de um conjunto complicado de dados, pode haver um sistema dinâmico que é determinado por poucos parâmetros - podemos modelar sistemas complicados! Assim, hoje em dia, sistemas que antes eram preferencialmente *descritos* (equivalente à lista de entradas e saídas) passaram a ser *modelados*. Frequentes exemplos são encontrados entre sistemas biológicos e sociais: genética de populações, o problema predador-presa, teoria de jogos, etc.

No que segue mostraremos alguns exemplos em que equações simples podem gerar soluções complicadas.

Exemplo 1: A equação logística e o caos determinista

O caos determinista é uma importante aquisição para a 'Biblioteca de Modelos Analisáveis', onde estariam todos os modelos matemáticos possíveis que os modeladores poderiam utilizar para descrever os sistemas naturais. Isto ocorre porque estes modelos resolvem um conflito antigo para os cientistas: existem sistemas naturais que são modelados por equações que são essencialmente determi-

nistas, mas que vêm frustrando toda a tentativa de se fazer previsões corretas sobre o seu comportamento

em tempos mais longos. Um exemplo é o clima.

O que as soluções destes sistemas matemáticos que descrevem caos determinista apresentam é uma dependência crítica nas condições iniciais. Isto significa o seguinte: suponha que estamos observando um sistema em um dado instante, por exemplo, uma pequena partícula que se locomove no espaço. Esta partícula descreve uma trajetória em tempos subsequentes. Suponha que possamos repetir exatamente a experiência, inclusive a ação do meio externo sobre a partícula, mas dessa vez deslocamos um pouquinho do ponto inicial. Tão pouquinho que só pudéssemos notar a diferença com a ajuda de uma lupa. Duas coisas podem acontecer: i) a segunda trajetória é quase igual à primeira, e somente com uma lupa poderíamos notar a diferença das duas para qualquer tempo, ou ii) a segunda trajetória fica notavelmente diferente da primeira. Neste caso, um observador sem lupa poderia chegar à conclusão que coisas diferentes podem acontecer para uma situação inicial indiferenciável e, portanto, não se pode prever a trajetória a partir da condição inicial. Isto é indeterminismo. Por outro lado, para um observador poder prever qual a trajetória seguida pela partícula, ele tem que ser

A Ciência está sempre procurando uma maneira matemática de comprimir a informação

As teorias da Natureza nunca são exatas. São sempre aproximações em que alguns fatores foram simplificados ou simplesmente desprezados. Se os efeitos destes fatores forem pequenos, dentro de uma margem de erro previamente estipulada como aceitável, o modelo ainda funciona

capaz de distinguir as duas posições iniciais, isto é, tem que ser capaz de medidas com grande *precisão*. Na realidade, para que as trajetórias de um sistema no regime caótico não diverjam *nunca*, é necessário *precisão infinita*. Por exemplo, especificação das condições iniciais através de números com infinitas casas decimais. O que, na prática, não é possível. Assim, embora sistemas caóticos sejam deterministas em princípio, não podemos prever comportamentos na prática, porque condições iniciais com precisão infinita podem não ser possíveis.

Em todo o caso, o fato de não se poder descrever com exatidão as trajetórias não significa que informações úteis não possam ser extraídas das soluções. Usualmente estas trajetórias caóticas são um número bem menor do que todas trajetórias que se podem imaginar, e compartilham algumas características. O que este resultado nos aponta é que diferentes aspectos, que não a trajetória em si, são relevantes de ser medidos - aqueles comuns às trajetórias caóticas.

Talvez o exemplo mais simples de um sistema caótico seja o mapa logístico, dado por

$$X_{t+1} = 1 X_t (1 - X_t), \quad (2)$$

para $0 \leq X \leq 1$.

Esta equação significa que toma-

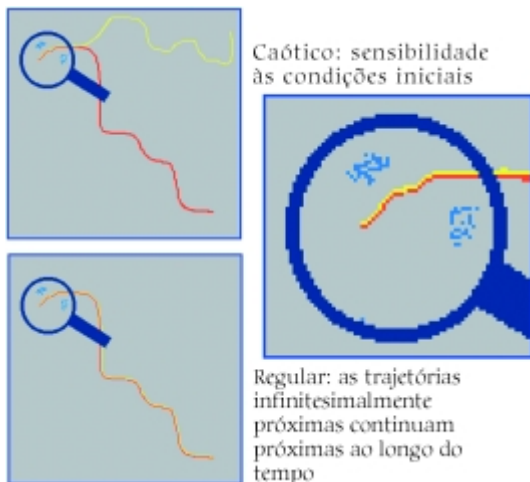


Figura 3. Representação esquemática da dependência das condições iniciais. Iniciando de pontos diferentes, mas muito próximos, as trajetórias descritas podem i) continuar próximas, caracterizando um comportamento regular ou ii) separar-se exponencialmente no tempo, caracterizando um regime caótico.

mos um valor inicial X_0 , calculamos X_1 através da equação acima, calculamos então X_2 a partir de X_1 e assim sucessivamente. Essa operação está representada na Figura 4, para dois valores diferentes de λ .

O ponto onde a reta verde deixa o eixo horizontal representa X_0 . Seguindo verticalmente até a curva cor de rosa, encontramos X_1 , representado pelo valor do eixo vertical neste ponto. Seguindo horizontalmente até a reta azul, onde $Y = X$, e então subindo pela vertical verde até a curva cor de rosa novamente, encontramos X_2 . E assim sucessivamente, vamos obtendo a trajetória definida por $(X_0, X_1, X_2, X_3, \dots)$. Na figura superior, para pequenos λ , este processo acaba levando-nos a um ponto fixo X_{fixo} , para o qual

$$X_{fixo} = \lambda X_{fixo} (1 - X_{fixo}) \quad (3)$$

e portanto $X_{t+1} = X_t$.

Repetindo este processo para valores maiores de λ , depois de muitas iterações, o sistema pode oscilar entre dois valores, ou entre quatro valores, e, à medida que λ cresce, o período de oscilação vai duplicando até que para um valor crítico λ_c , o sistema entra em caos, isto é, não há um limite definido para $X_{t \rightarrow \infty}$ e o sistema pula de um valor para outro sem uma lógica aparente. Este processo está representado na gráfico inferior da Figura 4.

Esta equação fornece o modelo mais simples que se tem para o crescimento limitado de populações biológicas. Mas o que ela nos ensina é que uma equação bastante simples pode apresentar soluções bastante complicadas, no sentido que X evolui de um valor para outro de uma maneira aparentemente aleatória. E que pequenas mudanças no valor de X_0 pode levar a trajetórias que divergem - levam a resultados diferentes. Toda a informação contida na lista infinita de posições sucessivas de uma traje-

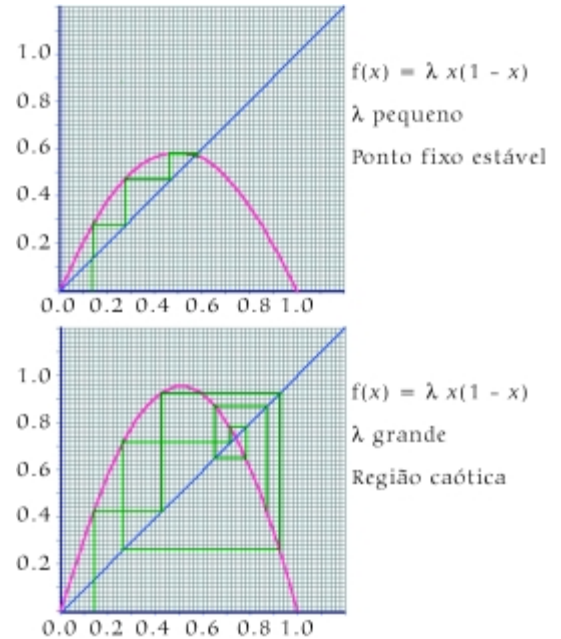


Figura 4. Representação de iterações sucessivas do mapa logístico (ver texto). A trajetória pode convergir para um ponto fixo (gráfico superior) ou então descrever uma trajetória que não converge (gráfico inferior), dependendo do parâmetro λ que está associado à altura máxima da curva em rosa.

tória caótica está contida na informação que a equação de evolução é o mapa logístico, e nos valores de λ e X_0 .

O conjunto de Mandelbrot: Uma estrutura fractal

Um exemplo fascinante onde estruturas muito complicadas podem ser geradas por uma equação simples com poucos parâmetros é dado pelo conjunto de Mandelbrot. Benoit Mandelbrot é um matemático belga que inventou a geometria fractal [3].

Para obtermos o conjunto de Mandelbrot, temos que definir um mapa de evolução, como na seção anterior. Com uma diferença: as variáveis são complexas. Isto significa que cada variável é composta de duas partes, uma real e outra imaginária. Tipicamente, um número complexo Z é escrito como

$$Z = a + b i \quad (4)$$

onde a e b são números reais, e i é a raiz quadrada de -1 . As 4 operações aritméticas podem ser definidas para estes números, bem como potenciação e radiciação. Um ponto interessante é que estes números têm que ser representados por dois valores indepen-

dentes e, portanto, localizam-se sobre um plano e não sobre uma reta. Cada ponto em um plano, então, pode representar um número complexo Z e a distância deste ponto à origem é definida como o módulo de Z .

Podemos definir a equação de iteração

$$Z_{t+1} = (Z_t)^2 + C \quad (5)$$

onde Z_t , Z_{t+1} e C são números complexos. Para construir o conjunto de Mandelbrot, procedemos da seguinte maneira. Tomamos um valor de C fixo e iteramos a Eq. (5) a partir de $Z_0 = 0 + 0i$. Se o módulo de $Z_{t \rightarrow \infty}$ permanece finito, isto é, não cresce sem limites, então este valor de C pertence ao conjunto de Mandelbrot. Varrendo todos os valores de C , isto é, para todos os valores possíveis para as partes real e imaginária de C e pintando de preto os pontos C que pertencem ao conjunto de Mandelbrot, obtemos a Figura 5. As diferentes cores fora do núcleo preto relacionam-se com o número de iterações necessárias para Z estar fora da tela.

Esta já é certamente uma figura complicada. Porém o grau de detalhe na superfície do conjunto de Mandelbrot (interface entre o preto e o vermelho) é infinita. Podemos escolher

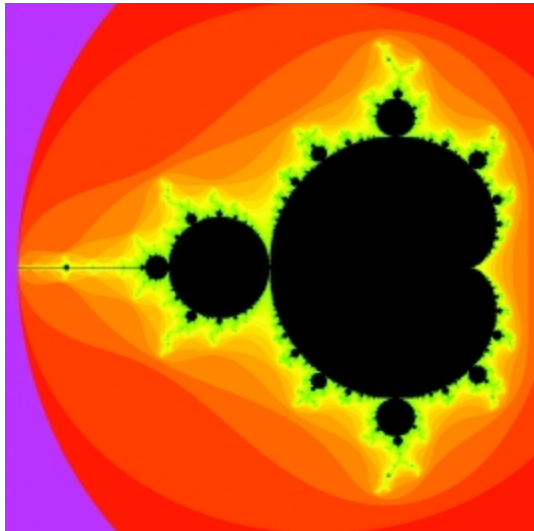


Figura 5. Gráfico no plano representando as componentes real e imaginária do parâmetro C de um mapa de Mandelbrot (ver texto). Os pontos em preto representam valores de C para os quais sucessivas iterações do mapa não divergem (vão ao infinito). As diferentes cores estão associadas ao número de iterações necessárias para que o resultado do mapa apresente módulo maior que 2 (o que garante a divergência).

diferentes regiões da superfície e dar 'zooms' para melhor vermos os detalhes. Na realidade, podemos dar zoom dentro de zoom, dentro de zoom, sem parar. O nível de detalhes nunca diminui. Esta é a característica mais marcante de estruturas fractais, e a chamamos de invariância de escala.

Alguns destes exemplos estão nas Figuras 6 a 8. As Figuras 6 e 7, em especial, repetem o conjunto de Mandelbrot depois de várias magnificações. Elas próprias também contêm regiões que após mais magnificações repetirão este mesmo padrão. Toda esta riqueza de detalhe está contida na informação de que o mapa de iteração é dado pela Eq. (5) e que pontos C que levam de $Z_0 = 0$ a $Z_{t \rightarrow \infty}$ limitados devem ser pintados de preto.

Conclusões

A aquisição de conhecimentos a partir de dados fornecidos pelo meio que nos cerca é uma capacidade inata do ser humano e certamente foi vantajosa para a sobrevivência de nossa espécie. A Ciência moderna trata dos conhecimentos adquiridos através de um método eficiente e seguro e descarta o critério da Autoridade.

Sempre que possível os cientistas tentam comprimir a informação adquirida em experimentos em leis matemáticas, de forma a descrever e explicar a Natureza. Assim, modelos matemáticos são propostos não só com o intuito de reproduzir experimentos já realizados, mas também de prever resultados para situações ainda não vivenciadas. Alguns sistemas na Natureza são muito complicados e fornecem dados experimentais que parecem aleatórios e sem correlação visível. Estas características tornaram impossível modelarmos matematicamente tais sistemas através de técnicas existentes antes dos computadores. Com o surgi-

mento dos computadores, muitos outros modelos matemáticos puderam ser resolvidos de uma forma ou de outra, e a 'Biblioteca de Modelos Analisáveis' aumentou consideravelmente, possibilitando a investigação de sistemas naturais mais complexos. As conseqüências extrapolam

o meio acadêmico, vivenciado principalmente por cientistas e estudantes, porque os resultados destes modelos matemáticos têm características que não se esperava que

pudessem apresentar.

Notemos primeiramente o fato de que sistemas com comportamentos complexos podem ser modelados por equações com poucos parâmetros. Isto significa que a informação contida em comportamentos complexos pode ser comprimida e, também, que pode ser explicada e não apenas descrita. Novas fronteiras para a Ciência!

Também, vimos que equações deterministas podem apresentar soluções não previsíveis na prática. Desse modo, modos alternativos de se explicar os resultados, assim como o grau de incerteza nas previsões, devem ser definidos. Isto implica em uma atitude diferente frente a sistemas complexos naturais: nem a confiança cega de que podemos fazer alguns cálculos e então prever o futuro do sistema com exatidão, nem a atitude nihilista de que nada podemos saber a respeito e portanto não existe porque interferirmos na evolução ou tentarmos uma explicação para estes sistemas.

Os sistemas simples são a exceção na Natureza. Os complexos são a regra geral. A complexidade aparece quando o grau de interação entre os vários componentes do sistema é suficientemente alto para que a análise do sistema em subsistemas não faça mais sentido. Nos modelos matemáticos isto é reconhecível. E na vida real também. Assim, ao avaliarmos situações do dia-a-dia, devemos estar alertas para o fato de que a interconexão de diferentes

Modelos matemáticos são propostos não só com o intuito de reproduzir experimentos já realizados, mas também de prever resultados para situações ainda não vivenciadas

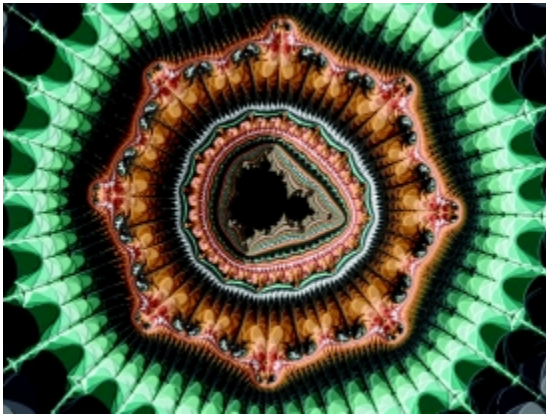


Figura 6.

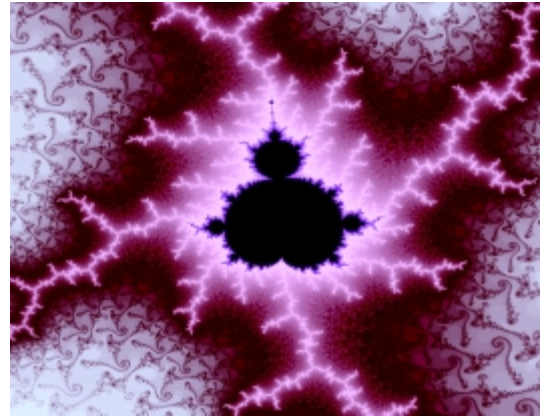
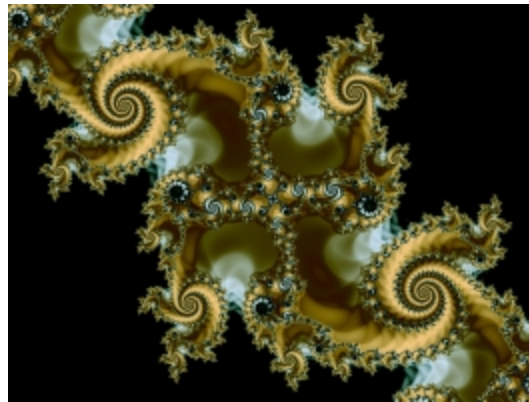


Figura 7.



Figuras 6-8. Conjunto de fractais que apresentam invariância de escala.

aspectos pode não permitir analisá-los separadamente.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar um ponto que não tivemos a oportunidade de entrar muito em detalhes, que é o caráter não-linear das equações que descrevem sistemas complexos. Este fato implica que pequenas mudanças nos parâmetros das equações podem ocasionar grandes mudanças nas soluções. Esta característica é freqüentemente observada em ecossistemas e em organizações

sociais, como escolas. Pequenas mudanças no ambiente, por exemplo, provocam grandes mudanças no aproveitamento e produtividade.

Assim, o estudo dos sistemas complexos leva-nos à conclusão de que sim, podemos modelar e tentar explicar sistemas complicados como o clima, ecossistemas e organizações sociais, mas que os resultados não podem ser previstos sem algum grau de incerteza calculável (que pode ser aceitável ou não) e que muito cuidado

deve ser tomado, pois pequenos desvios podem acarretar grandes efeitos, tanto para melhor quanto para o pior. Em todo o caso a exigência de otimização de recursos, humanos e materiais, a que estamos submetidos atualmente, não nos permite tomar decisões relevantes sem uma avaliação da situação tão realista e precisa quanto possível, o que poderia implicar em um modelo ou, na pior das hipóteses, uma metáfora, baseado em equações não-lineares.

Referências

Além das referências, listamos outras obras de divulgação científica bastante interessantes e acessíveis ao leigo interessado, bem como alguns sítios na internet.

- [1] D.S. Landes, *A Riqueza e a Pobreza das Nações* (Editora Campus, São Paulo, 1998).
 - [2] C. Sagan, *O Mundo Assombrado pelos Demônios* (Cia das Letras, São Paulo, 1997).
 - [3] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, São Francisco, 1983).
- P. Bak, *How Nature Works* (Springer-Verlag, New York, 1996).

- F. Capra, *A Teia da Vida* (Editora Cultrix, São Paulo, 1996).
- M. Gleiser, *A Dança do Universo* (Cia das Letras, São Paulo, 1997).
- S.J. Gould, *Wonderful Life* (Penguin, Londres, 1989).
- S. Kauffman, *At Home in the Universe* (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- M. Novello, *O Círculo do Tempo* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1997).
- H.-O. Peitgen e P.H. Richter, *The Beauty of Fractals* (Springer Verlag, Berlin, 1986).
- I. Prigogine e I. Stengers, *A Nova Aliança* (Editora UnB, Brasília, 1991).
- C. Sagan, *Cosmos* (Francisco Alves Editora, Rio de Janeiro, 1989).

- <http://scientium.com/drmatrix/> é um endereço de ciência em geral, desde Matemática à Biologia e Geologia. Tem muitos vínculos interessantes também.
- <http://math.rice.edu/~lanius/frac>: é adaptado para escolas dos níveis Fundamental e Médio.
- <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>: pode-se baixar versões atualizadas do programa Fractint, que gera fractais.
- http://www.thorsen.priv.no/services/mandelbrot:java_applet para o conjunto de Mandelbrot.
- www.geocities.com/inthechaos/ esta página é feita em português.