



.....
Maria Efigênia Gomes de Alencar (Dona Fifi)

Hoje aposentada, foi professora de Ciências em escolas de Sobral, Ceará. Dentre outras aventuras, teve o privilégio de presenciar o famoso eclipse que comprovou a relatividade geral de Einstein. Suas apostilas podem ser lidas em: www.seara.ufc.br

Incentivada pelo editor desta simpática revista, meu conterrâneo e, ele próprio, um *fibonacci*, animei-me a escrever esse texto que deveria tratar de uma tese que defendo há muito tempo, onde argumento que o cérebro feminino é mais adaptado que o masculino para entender as sutilezas da Física Quântica. O editor, porém, insistiu que eu escolhesse outro tema, considerando este muito polêmico. Acabou me convencendo com o argumento de que tal assunto não seria de interesse imediato para meus ex-colegas, professores de ciências do curso ginasial.

Tudo bem. Falarei, então, de assunto ameno e inofensivo, mas creio que capaz de sustentar a atenção de meus leitores até o final do artigo. Tratarei de um número famoso desde os tempos de Euclides de Alexandria, patriarca da geometria que viveu por volta do ano 300 antes de Cristo. Este número, chamado de Φ , foi definido por Euclides como resultado de uma operação geométrica muito simples.

Tome um segmento de reta AB e encontre um ponto intermediário, C, tal que $AC/CB = AB/AC$.

Pois bem, essa razão é o número Φ que vale:

$$\Phi = \frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = 1,6180339887...$$

Definido assim, o número Φ costuma ser chamado de “**proporção áurea**”, um número de ouro que surge, como veremos, onde menos se es-

pera, na Matemática, na Física, na Biologia, nas artes e até nas conSPIrações esotéricas.

Vamos, para começar, examinar algumas propriedades do número Φ e mostrar como obtê-lo por operações algébricas simples. Observe que, se considerarmos que o segmento CB é igual a 1 e que o segmento AC vale x , temos, por construção:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}. \text{ Isto é, } x^2 - x - 1 = 0.$$

Como toda equação de segundo grau, esta tem duas soluções que são:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

É claro que a solução positiva, x_1 , é justamente o número Φ , a “proporção áurea”. O negativo da outra solução será chamado de ϕ . Portanto:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

e

$$\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0,6180339887...$$

Como já disse e vou contar logo mais, o número Φ aparece em inúmeras e inesperadas situações, na Ciência, nas artes e nas coisas naturais e sobrenaturais. Mas, antes, vou falar de algo que foi descoberto séculos após Euclides por um matemático chamado Leonardo que, sendo morador de Pisa, a cidade onde existe a famosa torre inclinada, era conhecido como Leonardo de Pisa. E, como nas-

Alguns números possuem características que parecem aproximá-los mais da magia do que da Ciência. Neste artigo de estréia, Dona Fifi (ou $\Phi\Phi$, se preferirem...) mostra-nos a face mais saborosa.



A definição de Φ é feita a partir do segmento de reta AB onde marca-se um ponto C tal que $AC/CB = AB/AC$.

cera de família de boa estirpe, ficou também conhecido como Fibonacci, que significa, literalmente, “filho de boa gente”.

Pois esse Fibonacci publicou, em 1202, um livro chamado “Livro dos Ábacos” onde tratava de vários temas matemáticos que considerava como importantes. Um deles, provavelmente inventado por ele próprio, tratava do problema de calcular quantos coelhos poderiam ser produzidos em um ano, a partir de um único casal. Da forma como enunciado por Fibonacci, o problema é muito artificial. Supõe que cada casal leva um mês, após nascer, para ficar fértil, gera sempre outro casal, a cada mês, e nenhum coelho morre durante o ano. Mas o que interessa é o resultado.

O mês inicial (0) é usado para que o primeiro casal atinja a fertilidade. No mês seguinte o casal está fértil e um novo casal é gerado. Portanto, durante o segundo mês, teremos dois casais, o original (o X na figura indica um casal fértil) e o novo (representado por uma cruz), ainda infértil. No terceiro mês, o casal original gera mais um casal e o segundo casal fica fértil. Portanto, nesse terceiro mês teremos três casais. Agora, os dois primeiros casais estão férteis e cada um gera um novo casal. Dessa forma, o número de casais no quarto mês será 5. E assim por diante.

Mês	Casais
0	+
1	x
2	x +
3	x x +
4	x x x + +
5	x x x x x + + +
...	...

O resultado é uma seqüência de números em que cada um deles é obtido pela soma dos dois números imediatamente anteriores:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Esta é a “seqüência de Fibonacci”.

A expressão que dá o número de Fibonacci de ordem n é, simplesmente:

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2).$$

Pulando mais alguns séculos chegamos a Johannes Kepler, o célebre

astrônomo das três leis planetárias. Kepler notou, em 1611, que a divisão entre um número de Fibonacci e seu precedente leva ao número Φ quando se avança para valores cada vez maiores na seqüência. Em termos matemáticos, isto quer dizer que $F(n) / F(n - 1)$ tende para Φ quando n tende para infinito. Pegue uma calculadora e verifique isso.

De modo inverso, os números de Fibonacci podem ser gerados a partir de potências de Φ segundo a expressão:

$$F(n) = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^n}{\sqrt{5}}.$$

O interessante nessa expressão é que os números de Fibonacci, que são racionais, podem ser gerados de potências de Φ , que é irracional. Tecnicamente, diz-se que os números de Fibonacci seguem uma “lei de potência”. Números com essa propriedade não são completamente aleatórios.

O número Φ , por si mesmo, já tem algumas propriedades curiosas. Como vimos, ele é **irracional**, como seu colega mais famoso, o número π . Isto significa que esses números não podem ser obtidos pela divisão de dois inteiros. Só que o número Φ é menos redondinho, mas mais sofisticado e imprevisível. Ele pode surgir de expressões matemáticas bastante curiosas. Por exemplo, considere a expressão abaixo:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Parece muito complicado, mas, na verdade, é bem fácil mostrar que esse número x é justamente nosso Φ . Tome o quadrado de ambos os lados dessa expressão:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Ora, como o número de raízes é infinito, o segundo termo do lado direito da equação acima é justamente x . Logo, temos

$$x^2 = 1 + x.$$

Portanto, como vimos anteriormente, resulta que $x = \Phi$.

Outra expressão curiosa que leva a Φ é essa:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Deixo a vocês a tarefa simples de mostrar que esse x também é nosso querido Φ . Mas, quero aproveitar essa fração que não acaba nunca para comentar que o número Φ talvez seja o mais irracional dos números irracionais. Pois essa fração converge tão vagarosamente para Φ que parece nos mostrar a relutância de Φ em se associar a uma fração, mesmo que a fração não seja de inteiros.

O quadrado de Φ , isto é, $\Phi\Phi$, vale 2,6180339887...

Como vemos, o número $\Phi\Phi$ é o próprio número Φ acrescido de 1. Além disso, o inverso de Φ , isto é, $1/\Phi$ é igual a 0,6180339887..., que é $\Phi - 1$ e, como vemos, é o outro ϕ , definido anteriormente. Portanto, o número $\Phi\phi$ é igual a 1.

Podemos construir uma seqüência que chamarei de “seqüência de Fibonacci”, formada pelos quadrados dos números de Fibonacci. Ela é:

1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, 1156, 3025, 7921, ...

É claro que a fração entre dois números consecutivos dessa seqüência converge para o número $\Phi\Phi = 2,6180339887...$ Deixo para vocês a tarefa de encontrar uma regra de formação para essa seqüência.

A Fig. 1 mostra um **tijolo de Fibonacci** que é um paralelepípedo de lados 1, Φ e ϕ . Ele tem volume unitário e a área total de suas faces é 4Φ . Esse tijolo pode ser inscrito em uma esfera de raio 1. Portanto, a razão entre as

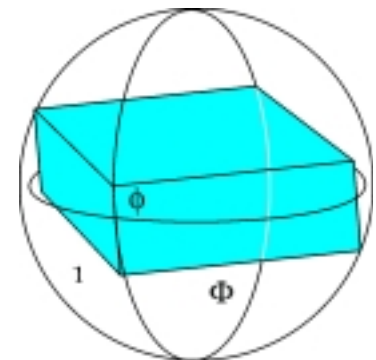


Figura 1. Tijolo de Fibonacci com lados 1, Φ e ϕ .

por 8 galhos no processo (Fig. 4).

Os botânicos acham que essa forma de dispor folhas e galhos tem uma razão prática, aproveitada pela seleção natural. Ela torna mais eficiente a utilização da luz solar e a exposição às gotas da chuva. Faz sentido, mas a seqüência de Fibonacci e sua espiral característica tam-

Existem áreas da Física onde os números de Fibonacci surgem por construção proposital e dão resultados interessantes, como por exemplo em óptica

bém aparecem em situações vegetais onde a explicação não é tão evidente.

Um bom exemplo é o abacaxi, essa deliciosa fruta que, dizem as más línguas, é o símbolo do nosso cinema. Nessa fotografia de um belo abacaxi (Antônio, novamente), podemos ver as espirais formadas pelos gomos da casca (Fig. 5). Cada gomo tem a forma aproximada de um hexágono e participa de três espirais que se cruzam.



Figura 5. O abacaxi de Fibonacci, ou melhor, a seqüência de Fibonacci no abacaxi...

Formando o menor ângulo com o eixo do abacaxi, 8 espirais paralelas circulam a fruta. Com um ângulo maior, são 13 espirais paralelas e com ângulo maior ainda, são 21 espirais. Não preciso nem lembrar que 8, 13 e 21 são números sucessivos na seqüência de Fibonacci.

Coisa parecida, e até mais evidente, acontece com os girassóis, onde o número de espirais formadas pelas sementes da flor é bem grande. Infelizmente, não encontrei girassóis em nosso jardim para fotografar. Recomendando que procurem em outros jardins.

Mas essa é uma revista para estudantes e professores de Física e até agora ainda não falei de situações físicas onde o número Φ e os números de Fibonacci aparecem. Pois, vou falar.

Existem áreas da Física onde os números de Fibonacci surgem por construção proposital e dão resultados interessantes. Veja, inicialmente, um exemplo muito simples: duas placas de vidro, com índices de refração diferentes, justapostas uma sobre a outra (Fig. 6). Um raio de luz que incide sobre esse conjunto pode sofrer reflexões e desvios. Vamos contar o número de caminhos possíveis de um raio de luz aumentando, gradualmente, o número de reflexões nesses caminhos.

Olhando a figura, podemos ver que o número de caminhos segue a seqüência de Fibonacci. Representando o número de reflexões, chamado

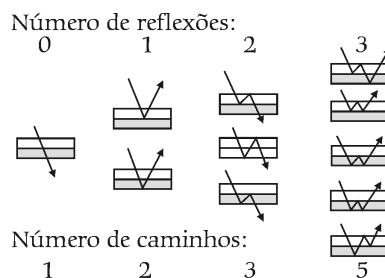


Figura 6. Número de caminhos possíveis, aumentando o número de reflexões, de um raio de luz que passa entre duas placas de vidro com índices de refração diferentes: a seqüência de Fibonacci em Óptica.

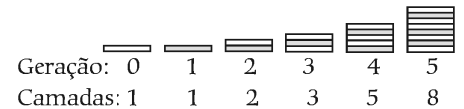


Figura 7. Pilhas com camadas de dois materiais transparentes com índices de refração diferentes segundo um esquema tipo Fibonacci.

de “geração”, pela letra n , o número de caminhos será $F(n)$, um número de Fibonacci. Por exemplo, a geração $n = 4$ leva a $F(4) = 8$ caminhos.

O físico nordestino Eudenilson Lins de Albuquerque é um especialista no estudo das propriedades físicas de camadas de materiais empilhadas segundo seqüências de Fibonacci. Dos trabalhos que ele já publicou pincei um exemplo relativamente simples.

Formam-se pilhas com camadas de dois materiais transparentes com índices de refração diferentes. A Fig. 7 mostra como montar essas pilhas segundo um esquema tipo Fibonacci. Cada pilha é formada colocando-se as duas pilhas anteriores uma sob a outra.

Um problema físico interessante consiste em saber quanta luz consegue atravessar uma dessas pilhas. Isto é, procura-se saber qual é a “transmitância” T da luz através da pilha, sendo T definido como $T = I/I_0$, onde I_0 é a intensidade da luz incidente e I é a intensidade da luz que sai do outro lado da pilha (Fig. 8).

As espessuras das camadas são feitas de modo a serem “óticamente equivalentes”. Isto significa que a luz leva um tempo igual para atravessar qualquer um dos dois tipos de camada ou, o que é o mesmo, que o número de ondas da luz é igual em camadas de tipos diferentes. Com esse arranjo, surgem interessantes casos de

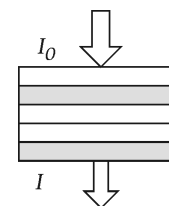


Figura 8. Medida da transmitância da luz através de uma pilha de Fibonacci montada conforme a Fig. 7.

interferência entre os feixes de luz que se refletem nas interfaces entre camadas vizinhas. Por exemplo, se a espessura ótica das camadas for exatamente igual a meio comprimento de onda da luz, isto é, $d = \lambda / 2$, os feixes refletidos nas faces sucessivas interferem destrutivamente e se aniquilam mutuamente. Nesse caso, portanto, a transmissão de luz pelas camadas é completa,

$T = 1$. Se a espessura das camadas for igual a um quarto de um comprimento de onda da luz, isto é, $d = \lambda / 4$, os feixes refletidos se reforçam mutuamente e

a transmissão é incompleta, $T < 1$. Para outros comprimentos de onda da luz, T varia entre esses dois valores extremos. Quando o número de camadas cresce segundo as gerações de Fibonacci, a transmissão de luz varia entre 0 e 1 de uma forma que depende da ordem na seqüência (Fig. 9).

Essa figura, que foi adaptada de um dos trabalhos de Eudenilson, mostra como a transmissão de luz (T) varia com o comprimento de onda da luz incidente para uma pilha correspondente à geração S_7 , com 13 camadas. Um resultado interessante é que a forma dessas curvas de transmissão se reproduz a cada 6 gerações de Fibonacci. Isto é, essa figura também está mostrando T para uma pilha correspondente à geração S_{13} , com 233 camadas. Basta ajustar a escala dos comprimentos de onda de forma

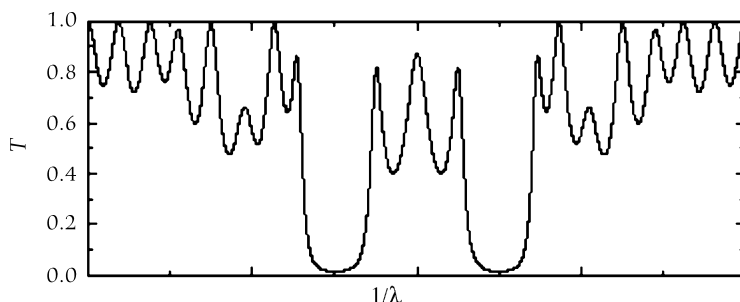


Figura 9. Variação da transmitância com o comprimento de onda da luz incidindo em uma pilha de Fibonacci com 13 camadas.

adequada.

Sempre que surge uma reprodução de formas desse tipo diz-se que a curva estudada tem “propriedade de escala”. Os físicos adoram encontrar essas “leis de escala” em seus modelos e experimentos. Esse comportamento que acabamos de relatar talvez seja mais uma manifestação da não-aleatoriedade dos números de Fibonacci, mencionada anteriormente.

Vamos agora falar do problema de preencher um plano com mosaicos de formas arbitrárias. É um problema geométrico com implicações na Física dos

Sólidos, como veremos. Se os mosaicos tiverem a forma de polígonos regulares, com lados e ângulos iguais, topamos logo com uma limitação. Triângulos, quadrados e hexágonos regulares podem ser usados para cobrir um plano, mas, pentágonos não servem para isso. Quando tentamos cobrir um piso com mosaicos pentagonais logo constatamos que sobram espaços vazios. Essa observação levou os cristalógrafos à conclusão de que não poderiam existir cristais onde os átomos e moléculas se ajustassem formando uma simetria pentagonal, também chamada de “simetria de ordem-5”.

Mas o plano pode ser preenchido com mosaicos não-regulares. Ou, com mais de um tipo de mosaico, com formas diferentes. O incrível pintor holandês Mauritus Escher, que uma vez me presenteou com uma de suas

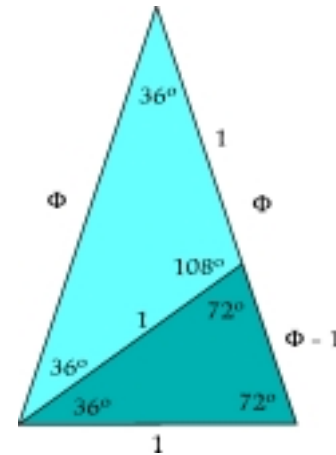


Figura 10. Triângulo isósceles de lados iguais a Φ .

belas gravuras, era um mestre nessa arte de preencher planos com figuras de todo tipo. Sem a sofisticação dos quadros de Escher, podemos ver que um piso pode facilmente ser coberto, sem deixar vazios, por mosaicos hexagonais e pentagonais, em um padrão semelhante ao que vemos nas bolas de futebol.

O físico inglês Roger Penrose, que foi orientador do famoso Stephen Hawking, inventou um tipo de mosaico de duas formas com características aparentemente contraditórias: tem simetria de ordem-5, preenche o plano e não é periódico. Os mosaicos de Penrose são formados a partir de um triângulo isósceles de lados iguais a Φ (Fig. 10). Esse triângulo converte-se em dois, mostrados com cores diferentes na figura, dividindo-se um dos lados em uma parte que mede 1 e outra que mede $\Phi - 1$. Combinando esses novos triângulos, Penrose montou dois tipos de mosaico, uma seta e uma arraia (que os sulistas chamam de pipa). Usando esses dois “mosaicos de Penrose” o plano pode ser preenchido. Mais uma vez, não preciso nem dizer como esse mosaico está repleto de proporções áureas (Fig. 11).

É surpreendente que, se dividimos o número de arraias pelo número de setas em uma dada área do mosaico de Penrose, essa fração tende para Φ quando a área examinada é cada vez maior.

Os mosaicos de Penrose cobrem uma superfície plana bi-dimensional,

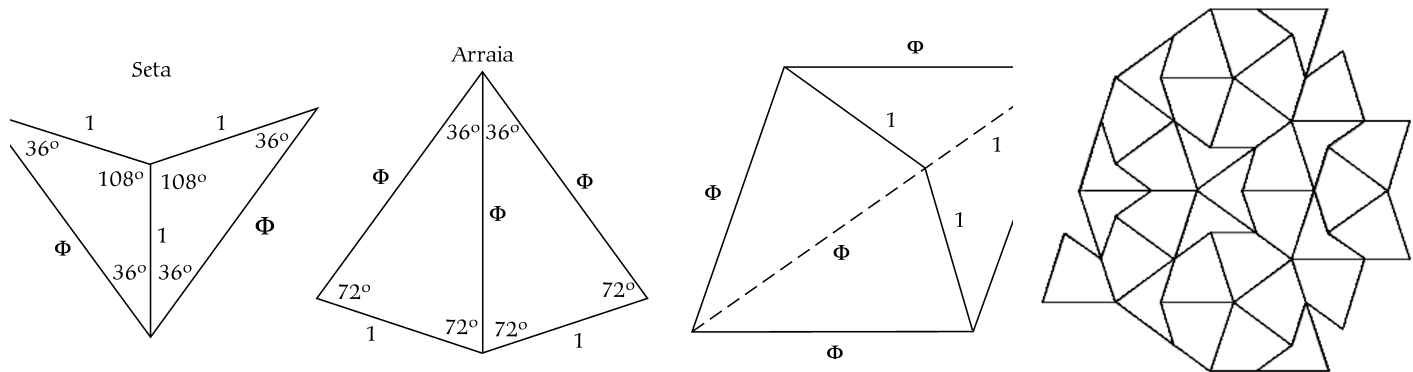


Figura 11. “Mosaicos de Penrose”, que preenchem exatamente uma área plana.

mas os matemáticos já acharam pares de formas volumétricas que preenchem por completo o espaço tri-dimensional. São objetos que lembram cubos com faces repuxadas, todas idênticas aos mosaicos planos de Penrose. São chamados, por causa disso, de “romboedros áureos”.

O que não se esperava, porém, é que a simetria de

ordem-5, presente nos mosaicos de Penrose e nesses romboedros que enchem o espaço, pudesse surgir em objetos físicos reais, como sólidos. Mas, surgiu. Na década de 80 do século passado foram descobertos certos materiais que tinham simetria de ordem-5 e um arranjo não-periódico. Foram chamados de “quase-cristais”, pois têm simetria de rotação, como os cristais normais, mas não têm simetria de translação, isto é, não possuem uma “célula” que se repete periodicamente em alguma direção espacial.

Penrose, que é um especialista em buracos-negros, inventou seus mosaicos meio de brincadeira e não imaginava que eles chegassem a ser úteis na descoberta e explicação dos quase-cristais. Mais recentemente, Penrose passou a se dedicar à tarefa de procurar explicações para a *consciência*, essa propriedade espantosa que temos de pensar, fazer associações e buscar explicações até para a própria cons-

ciência, em um processo auto-recorrente um tanto vertiginoso. Penrose acha que a consciência pode ser o resultado de processos quânticos que

Penrose dedicou-se à tarefa de procurar explicações para a *consciência*. Ele acha que a consciência pode ser o resultado de processos quânticos que têm lugar no interior dos *microtubos*, e, oh, nanotubos também envolvem números de Fibonacci

têm lugar no interior dos *microtubos*, um emaranhado de filamentos que formam o *citoesqueleto*, estrutura presente em todas as células dos seres vivos. Segundo Penrose, os microtubos seriam o local mais propício

para abrigar os processos quânticos que resultariam na consciência. Não creio que valha a pena entrar nos detalhes desse palpite de Roger Penrose mas cabe contar como ele envolve também os números de Fibonacci.

A parede de um microtubo é formada por colunas de unidades chamadas de *tubulins*. Ao todo, um microtubo tem 13 colunas de tubulins. A disposição dos tubulins forma espirais que lembram as espirais desenhadas pelos gomos do abacaxi. Como vemos no desenho, seguindo as espirais em torno do microtubo, encontramos padrões que se repetem a cada 3, 5, 8 e 13 unidades. Todos esses números, é claro, fazem parte da seqüência de Fibonacci (Fig. 12).

Tem gente que já sugeriu que o aparecimento dos números de Fibonacci nos microtubos não se dá por acaso. Do mesmo modo que o arranjo de Fibonacci facilita o aproveitamento da luz do sol e da água da chuva nas folhas e nos galhos das árvores, tam-



Figura 12. Microtubos apresentam uma seqüência de Fibonacci. Para Penrose, a consciência pode ser o resultado de processos quânticos que têm lugar no interior dessas estruturas.

bém poderia promover o fluxo de informações nos microtubos. Haja especulação, mas, pelo menos, é uma especulação excitante.

Muito mais há para contar sobre esses maravilhosos números mas acho melhor parar por aqui. Com essa introdução vocês já estão prontos para adquirir a mania de encontrar a proporção áurea e os números de Fibonacci nas coisas do mundo em que vivem. Quem sabe, até descobrir novas associações ainda desconhecidas. Outra vez, se o editor da revista me permitir e se, antes disso, o acendedor do *big-bang* não me convocar para um *tête-à-tête*, voltaremos a conversar, talvez até sobre os assuntos polêmicos que mencionei.

Referências

- M. Livio, *The Golden Ratio* (Broadway Books, New York, 2002).
- R. Penrose, *A Mente Nova do Rei* (Editora Campus, 1991).
- E.L. Albuquerque e M.G. Cottam, *Physics Reports* **376**, 255 (2003).