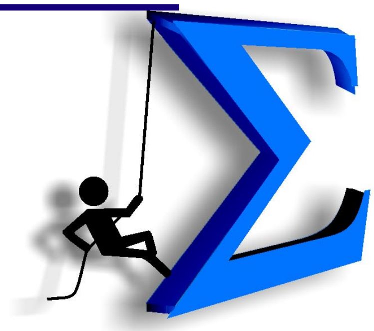


Problemas Olímpicos

Soluções do Número Anterior

1 Solução dos problemas da X Olimpíada Cearense de Física, realizada em 2002.

Problema 1. O homem que salta de uma plataforma. a) Seja k a constante elástica da corda e l_0 seu comprimento normal. O máximo comprimento da corda esticada é $l_1 = h - h_0 = 25 - 2 = 23$ m, enquanto o comprimento na posição final de equilíbrio é: $l_2 = 23 - 8 = 15$ m.

A energia cinética é zero no início da queda e na posição final de equilíbrio. Desprezando o peso da corda e supondo que o centro de massa do homem está na metade de sua altura, usamos conservação de energia e temos

$$mgh = \frac{1}{2} k\,(l_1 - l_2)^2$$

No equilíbrio: $mg = k\,(l_2 - l_0)$.

Dividindo uma equação pela outra, temos que

$$l_0^2 + 2(h - l_1)l_0 + (l_1^2 - 2hl_2) = l_0^2 + 4l_0 - 221 = 0$$

Daí obtemos $l_0 = 13$ m.

b) Quando o homem está com velocidade máxima, sua aceleração deve ser zero e isso deve ocorrer na posição de equilíbrio final ($l = l_2$). Usando novamente a conservação da energia:

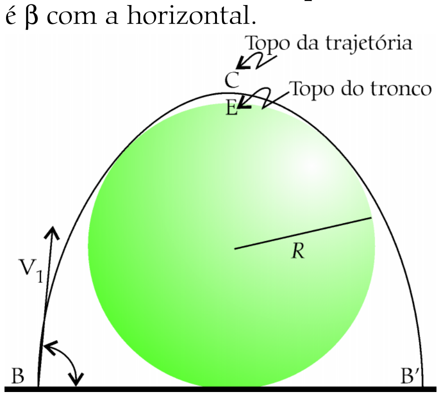
$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k\,(l_2 - l_0)^2 = mg\,(l_2 + h_0)$$

A condição m/k é dada pela condição de equilíbrio: $\frac{m}{k} = \frac{l_2 - l_0}{g}$

Substituindo na equação da energia, vemos que a velocidade máxima é $v = 18$ m/s ≅ 65 km/h.

A máxima aceleração ocorre no ponto mais baixo do salto, onde a velocidade é zero. Como a distensão máxima da corda (25 - 13 - 2 = 10 m) é 5 vezes a extensão na posição de equilíbrio (25 - 8 - 13 - 2 = 2 m), a tensão máxima é 5 mg. Logo, a maior força líqüida exercida sobre o saltador é 4 mg e sua aceleração máxima será de 4 g.

Problema 2. O grilo prestes a saltar um tronco. A trajetória é uma parábola que toca o tronco em duas posições simétricas B e B′. B e B′ podem até coincidir com o topo do tronco, E (ainda não sabemos). Nos pontos B e B′ a velocidade do grilo é v_2 e o ângulo é β com a horizontal.



Então $v_2 \text{sen}\beta = gt_2$

Na qual t_2 é o tempo de vôo de B até C, onde C é o topo da trajetória. Durante esse tempo t_2 o deslocamento horizontal é: $v_2 t_2 \cos\beta = R\,\text{sen}\beta$

Multiplicando uma equação pela outra:

$$v_2^2 = \frac{gR}{\cos\beta}$$

Conservação da energia entre A e B dá:

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv_2^2 + mg(R = R\cos\beta)$$

$$v_1^2 = 2gR\ \ 1 + \cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}$$

Usando a relação entre médias, temos:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}\right) \geq \sqrt{\cos\beta\ \frac{1}{2\cos\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo: $\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta} \geq \sqrt{2}$, portanto $2\cos^2\beta - 2\sqrt{2}\cos\beta + 1 = 0$.

Resolvendo essa equação, obtemos $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, portanto, β = 45°.

Nota: a solução β = 0 dá $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ que é maior que $\sqrt{2}$. Logo, não serve.

O valor da velocidade mínima v_1 será:

$$v_1^2 = 2gR\left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2gR\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{2gR\left(1 + \sqrt{2}\right)} \cong 2{,}2\ \ m/s$$

Problema 3. A estimativa da altura de um avião voando com velocidade horizontal constante. O som emitido pelo avião ao passar pelo ponto A chega ao observador O no solo quando o avião já passou sobre ele e está no ponto B. A reta OB deve ser tangente à esfera com centro em A, correspondente à primeira frente de onda sonora emitida pelo avião que chega ao observador. A distância AO vale $V_S t$, onde V_S é a velocidade do som e t é o tempo para o som ir de A a O. Esse tempo equivale ao tempo para o avião ir de A até B com velocidade V_A, percorrendo AB = $V_A t$. Logo:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{AO}{AB} = \frac{V_S t}{V_A t} = \frac{V_S}{V_A},$$

portanto $\text{tg}\,\theta = \frac{V_S}{\sqrt{V_A^2 - V_S^2}}$

O enunciado diz que CB = V_A x (21 s). Logo:

$H = 21 \text{ x } V_A \text{ x tg } \theta$

Usando os dados do problema, acha-se: $H = 9732$ m.

2 Densidades terrestre e solar. A força de atração gravitacional do Sol é

$$F = G\frac{M_S M_T}{L^2}$$

contrabalança a aceleração centrípeta da Terra

$$a_c = \omega^2 L = \frac{4\pi^2}{T^2}L$$

em que ω é a velocidade angular, T o período de revolução da Terra ao redor do Sol (= 1 ano), L o raio da órbita terrestre, M_S e M_T as massas do Sol e da Terra, respectivamente. De acordo com a 2ª lei de Newton,

$$G\frac{M_S M_T}{L^2} = M_T\frac{4\pi^2}{T^2}L.$$

Mas $G\dfrac{M_T}{R_T^2} = g$ e

$$M_S\, g\frac{R_T^2}{L^2} = M_T\frac{4\pi^2}{T^2}L, \text{ ou}$$

$$\frac{M_T}{M_S} = \frac{gR_T^3 T^2}{4\pi^2 L^3} \qquad (1)$$

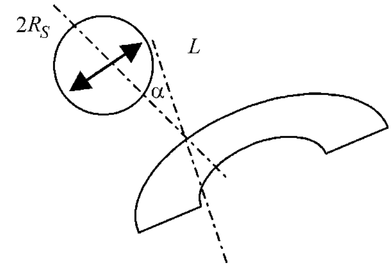
Mas $M_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho_T$ e

$$M_S = \frac{4}{3}\pi R_S^3 \rho_S$$

Substituindo esta última equação na Eq. (1), resulta

$$\frac{\rho_T}{\rho_S} = \frac{gR_S^3 T^2}{4\pi^2 L^3 R_T}$$

Basta escrever R_S em termos de L e α. Olhando a figura abaixo,



vemos que $R_S = L\alpha/2$, e finalmente

$$\frac{\rho_T}{\rho_S} = \frac{g\,\alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_T} \approx 4{,}4$$

3 O calor dissipado por uma placa imersa em um campo elétrico. Quando um corpo condutor é colocado em um campo elétrico, as cargas livres se rearranjam de tal forma que o campo elétrico resultante dentro do corpo se anula. Como conseqüência, nas faces opostas da placa acumulam-se cargas de sinais opostos. As cargas livres localizadas na superfície da placa geram um campo elétrico com intensidade $-\vec{E}$ dentro da placa e nulo fora dela.

Imediatamente após se desligar o campo elétrico aplicado, somente o campo gerado pelas cargas livres estará presente dentro da placa condutora. A energia deste campo é

$$U = \frac{E^2}{2}\varepsilon_0 Sd$$

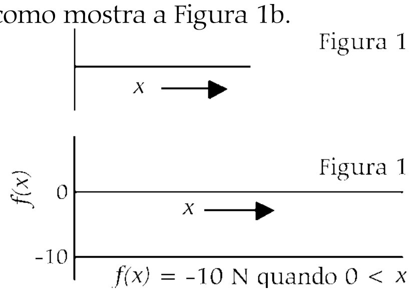
Sob o efeito deste campo, as cargas irão se distribuir sobre todo o volume do corpo. Durante este processo, a energia armazenada no campo se dissipará na forma de calor, e portanto

$$Q = \frac{E^2}{2}\varepsilon_0 Sd$$

Novos Problemas

Estes problemas constavam na XIV Olimpíada Internacional de Física – Bucareste, Romenia (1988).

1 Uma particula move-se ao longo do eixo x positivo, OX, como mostra a Figura 1a. Uma das forças agindo na partícula é $f(x)$ como mostra a Figura 1b.



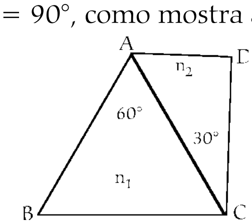
A parede em $x = 0$ é uma superfície perfeitamente refletora. Durante o movimento, a partícula recebe uma força de atrito $F = 1$ N na direção oposta à direção de seu movimento. Se a partícula inicia o movimento do ponto $x = x_0$ com uma energia cinética $E_0 = 10.0$ J,

a) Encontre a expressão para a distância percorrida pela partícula antes da mesma atingir o repouso.

b) Esboce um gráfico da energia potencial da partícula $U(x)$ no campo de força $f(x)$.

c) Esboce um gráfico da velocidade da partícula como função de x.

2 Dois prismas de ângulos $A_1 = 60°$ e $A_2 = 30°$, respectivamente, são colocados juntos formando um prisma composto com um ângulo $\angle BCD = 90°$, como mostra a figura.



O índice de refração dos dois prismas é uma função do comprimento de onda obedecendo às fórmulas: $n_1 = a_1 + b_1/\lambda_1^2$; $n_2 = a_2 + b_2/\lambda_2^2$; $n_1 = 1{,}1$; $n_2 = 1{,}3$; $b_1 = 10^5$ nm^2 e $b_2 = 5 \times 10^4$ nm^2

a) Determine o comprimento de onda λ_0 de modo que um raio de luz que incida de qualquer direção passe através de AB e saindo por AC sem sofrer reflexão em nenhuma superfície.

b) Desenhe o caminho de 3 raios de comprimentos de onda $\lambda_{vermelho}$, λ_0, λ_{azul} para um mesmo ângulo de incidência no lado AB.

c) Determine o ângulo de desvio mínimo para o prisma composto.

d) Determine o comprimento de onda de um raio incidente que refratará em um raio dentro do prisma composto paralelo a superfície BC e emergindo deste prisma em uma direção também paralela a BC.

3 Um fóton tendo comprimento de onda λ_0 colide com um elétron livre em movimento forçando o elétron a estar em repouso após a colisão. O comprimento de onda do fóton muda para λ'_0, e o fóton continua sua trajetória em uma direção fazendo um ângulo de 60° com a direção inicial do movimento. Este fóton de comprimento de onda λ'_0 colide com outro elétron livre em repouso, causando uma variação no comprimento de onda do fóton de λ'_0 para $\lambda''_0 = 1.25 \times 10^{-10}$ m, enquanto a direção do fóton varia de 60° de sua direção antes da segunda colisão. Determine o comprimento de onda de de Broglie do primeiro elétron antes da primeira colisão.

Dados: constante de Planck $h = 6{,}6\text{x}10^{-34}$ Js, massa do elétron $m = 9{,}1\text{x}10^{-31}$ kg, magnitude da velocidade da luz $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s.