

# Problemas Olímpicos

## Soluções do Número Anterior

Seleção e tradução:

**José Evangelista Moreira**

Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará  
e-mail: ita@fisica.ufc.br

**José Pedro Rino**

Departamento de Física, Universidade Federal de S. Carlos  
e-mail: djpr@df.ufscar.br

**1** **Determinação do calor específico do petróleo.** O calor específico do petróleo pode ser determinado misturando-se quantidades conhecidas de petróleo e água a uma temperatura também conhecida em um calorímetro. A temperatura da mistura pode ser facilmente medida. Conhecendo-se os calores específicos e as massas do calorímetro e da água, pode-se calcular o calor específico do petróleo.

Solução alternativa: Aquece-se água no calorímetro com a ajuda do aquecedor elétrico e anota-se a temperatura durante alguns intervalos de tempo. Repete-se o experimento usando o petróleo com as mesmas quantidades como feito para a água. Faz-se um gráfico da temperatura como função do tempo, tanto para a água como para o petróleo.

Sejam:

$m_a$ : a massa de água

$c_a$ : calor específico da água

$m_c$ : a massa do calorímetro

$c_c$ : o calor específico do calorímetro

$m_p$ : a massa de petróleo usado no experimento

$c_p$ : o calor específico do petróleo

$t$ : o tempo de aquecimento

$T$ : a temperatura no tempo  $t$

$T_0$ : a temperatura dos líquidos em  $t = 0$

$H$ : calor absorvido pelo calorímetro por segundo

$$(m_a c_a + m_c c_c)(T - T_0) = Ht.$$

$$T = \frac{Ht}{m_a c_a + m_c c_c} - T_0.$$

Sejam  $a$  e  $b$  as inclinações das retas dos gráficos para a água e para o pe-

tróleo, respectivamente, ou seja:

$$a = \frac{H}{m_a c_a + m_c c_c}$$

$$b = \frac{H}{m_p c_p + m_c c_c}.$$

Lembrando que  $m_p$ , massa do petróleo líquido é igual à massa de água,  $m_p = m_a$ , então

$$\frac{a}{b} = \frac{m_a c_p + m_c c_c}{m_a c_a + m_c c_c}.$$

Ou seja, sabendo-se o calor específico da água e do calorímetro ( $c_a$  e  $c_c$ ) o calor específico do petróleo pode ser calculado.

**2** **O andarilho no deserto.** Como a temperatura do solo pode ser aumentada rapidamente pelo Sol, o ar perto do chão será mais quente do que o ar na altura dos olhos. Como resultado, o índice de refração do ar próximo ao solo será menor do que o índice de refração do ar para pontos afastados do chão. Quando o andarilho olha para baixo (seus olhos estão a mais de um metro de altura em relação ao solo) ele vê "água" à sua frente para pequenos ângulos de depressão  $i$ . Ocorrerá reflexão total quando  $r = 90^\circ$  e então

$$n_A \sin(i) = n_B \sin(90^\circ)$$

sendo  $n_A$  o índice de refração a altura dos olhos. Quando o andarilho se move na direção da "água" o fenômeno persiste, pois a posição da "água" também se afasta do andarilho. Se a temperatura não se alterar, o fenômeno só é observado para um certo ângulo.

Sejam  $n_{A1}$  o índice de refração do ar a a temperatura  $T_1 = 30^\circ\text{C}$ ,  $n_{A2}$  o

Esta seção apresentará problemas desafiadores que têm sido propostos em olimpíadas, gincanas e livros e comentará a solução dos mesmos.

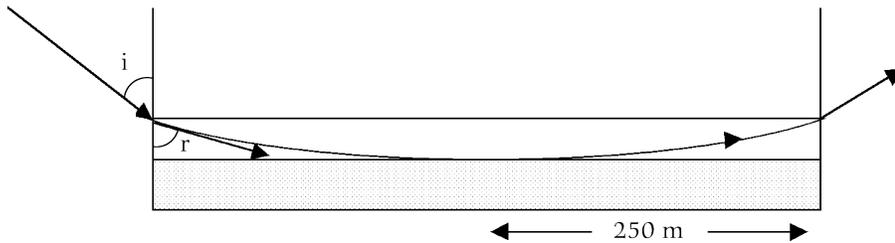


Figura 1.

índice de refração para a temperatura  $T_2 = 15^\circ\text{C}$  e  $n_T$ , o índice de refração de uma camada de ar em contato com o solo e  $T$  a temperatura desta camada. Desta forma,

$$n_A \sin(i) = n_B \sin(90^\circ)$$

A Figura 1 ilustra o fato experimental. A partir dela, temos:

$$\text{tg}(i) = \frac{250}{1,6} \Rightarrow i = 89^\circ 38'$$

$$n_{A1} \sin(89^\circ 39') = n_T \Rightarrow n_T = 0,99998 n_{A1}$$

Do problema, temos que

$$n_T - 1 = \rho_T$$

$$\frac{n_{A1} - 1}{n_{A2} - 1} = \frac{\rho_{A1}}{\rho_{A2}}$$

Aplicando a equação de estado de gás ideal a pressão normal e volume constante, sendo que somente a densidade e a temperatura são variáveis,

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

em que  $m$  é a massa do volume de ar em consideração e  $M$  a massa molar (a temperatura deve ser dada em Kelvins; temos  $T_1 = 303\text{ K}$ ,  $T_2 = 288\text{ K}$  e  $T = (273 + D)\text{ K}$ ).

Assim,

$$P = \frac{\rho}{M} RT \Rightarrow \frac{PM}{R} = \rho T = \text{constante}$$

$$\rho_{A2} T_2 = \rho_{A1} T_1 = \rho_T T \Rightarrow \frac{\rho_{A1}}{\rho_{A2}} = \frac{288}{303}$$

$$\frac{\rho_T}{\rho_{A2}} = \frac{288}{273 + D}$$

Substituindo em (1), obtemos

$$\frac{n_{A1} - 1}{0,000276} = \frac{288}{303} \Rightarrow n_{A1} = 1,000262$$

Desta forma,

$$\frac{n_T - 1}{n_{A2} - 1} = \frac{\rho_T}{\rho_{A2}}$$

Usando o resultado da Eq. (1) obtemos  $n_T = 1,000242$ . Substituindo este valor na equação acima resultará em

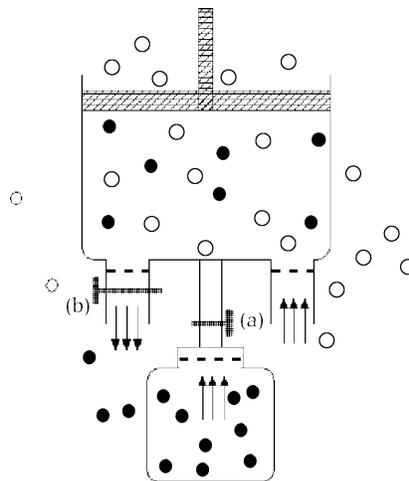
$$C = 55,4^\circ\text{C}$$

A precisão da temperatura calculada acima depende enormemente da acurácia dos valores medidos da temperatura e índice de refração do ar.

**3 A máquina capaz de produzir trabalho.** Uma possível construção de uma máquina deve basear-se em dois princípios:

i) em uma mistura de dois gases não reativos ocupando um mesmo recipiente, a pressão total da mistura é igual a soma da pressão parcial de cada gás. Por pressão parcial entende-se a pressão que cada gás teria se ele ocupasse sozinho o mesmo volume na mesma temperatura.

ii) Se uma membrana permeável a certo tipo de gás for colocada no recipiente dividindo-o em duas partes, a pressão parcial deste gás será a mesma nos dois lados da membrana.



○ Molécula de ar  
● Molécula de gás mais pesado

No diagrama, o cilindro superior possui duas aberturas que são fechadas com membranas permeáveis. Na abertura da esquerda coloca-se uma membrana permeável somente ao gás mais pesado que o ar e que pode ser

controlado com uma válvula (a). A abertura do lado direito é fechada com uma membrana permeável ao ar, mas sem nenhuma válvula de controle. No meio deste cilindro há um tubo com válvula (b) conectando-o ao tanque cheio com o gás mais pesado que o ar havendo também uma membrana permeável a este gás.

Operação da máquina térmica

i) Com a válvula (a) fechada e a válvula (b) aberta, o gás inerte do tanque irá fluir para o cilindro até que as pressões parciais dentro do cilindro atinjam 1 atm. Durante este processo a pressão total dentro do cilindro irá crescendo gradualmente até atingir o valor de 2 atm. Observa-se então que o gás mais pesado realiza trabalho enquanto o ar não o faz, uma vez que as pressões dos dois lados da membrana permeável ao ar são as mesmas.

ii) Fecha-se a válvula (a) para parar o movimento do pistão.

iii) Enquanto a válvula (a) está fechada, abre-se a válvula (b) para permitir que o gás mais pesado saia para a atmosfera. O pistão gradualmente retorna à posição inicial. Quando o pistão parar, haverá somente ar dentro do cilindro superior.

iv) O ciclo da máquina térmica foi completado. A operação para o próximo ciclo é realizada, voltando-se a operação (i).

Se o cilindro e o pistão são feitos de um material condutor perfeito, o processo será isotérmico.

O trabalho produzido pela máquina será igual ao trabalho realizado pelo gás mais pesado, isto é:

$$\int P dV = \int \frac{RT}{V} dV = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

**4 Observações feitas por um sistema de radiotelescópios da Inglaterra.** Aparentemente, o

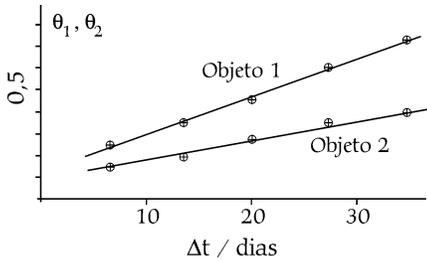
material ejetado do centro da fonte de rádio GRS 1915+105 se afasta com velocidade superior à velocidade da luz. Na verdade, trata-se de uma ilusão causada por um efeito de perspectiva, como veremos:

a) A tabela abaixo foi obtida medindo as distâncias na figura 3.1. Os ângulos estão em segundos de arco. Com esses valores, traçamos o gráfico pedido (veja mais abaixo) e

achamos as velocidades angulares dos dois objetos ejetados.

Dia	$\Delta t$ (dias)	$\theta_1$ (")	$\theta_2$ (")
27/3	—	—	—
03/4	7	0,24	0,15
09/4	13	0,36	0,20
16/4	20	0,47	0,26
23/4	27	0,60	0,32
30/4	34	0,72	0,38

Nossa estimativa é que o erro nessas medidas seja da ordem de  $\pm 0,015$  s.a. nos valores de  $\theta$ .



A partir desse gráfico, podemos obter os valores de  $w_1$  e  $w_2$ :

$$w_1 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ rad/s}$$

e

$$w_2 = 0,5 \times 10^{-12} \text{ rad/s.}$$

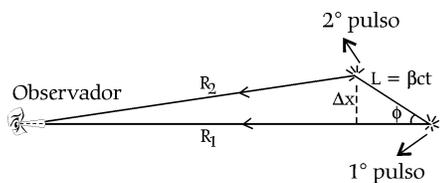
Usando  $R = 12,5 \text{ kpc}$ , onde  $1 \text{ kpc} = 3,09 \times 10^{19} \text{ m}$ , obtemos as velocidades pedidas:

$$v_1 = w_1 R = 3,80 \times 10^8 \text{ m/s}$$

e

$$v_2 = w_2 R = 1,9 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

b) Solução do paradoxo ( $v > c$ ).



A velocidade transversal aparente  $v'$ , para o observador da Terra, é a distância transversal percorrida dividida pelo tempo de chegada dos sinais que partem em instantes diferentes da fonte de rádio. Se o primeiro pulso sai no instante  $t = 0$  e percorre a distância  $R_1$ , chegará ao observador no instante  $T_1$ . O segundo pulso sai no instante  $t$  e chega no instante  $T_2$ , após percorrer a distância  $R_2$ .

Queremos achar  $v'$  em termos de  $\beta = v/c$ ,  $R$  e  $\phi$ . Pela figura, temos:  $R_1 \cong R_2 + \beta c t \cos \phi$ . A aproximação se justifica, pois o ângulo é muito pequeno.

Como os pulsos viajam com a velocidade da luz ( $c$ ), temos:

$$T_1 = \frac{R_2 + \beta c t \cos \phi}{c} = \frac{R_2}{c} + \beta t \cos \phi$$

e

$$T_2 = t + \frac{R_2}{c}.$$

Logo,

$$\Delta T = T_2 - T_1 = t (1 - \beta \cos \phi).$$

A distância transversal percorrida pelo objeto, aparentemente, é  $\Delta x = \beta c t \sin \phi$ .

Logo, a velocidade transversal aparente será:

$$v' = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi},$$

que é a expressão pedida.

A velocidade angular é, simplesmente,

$$w = \frac{v'}{R} = \frac{c \beta \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}.$$

Podemos usar o fato de  $\phi$  ser pequeno para obter uma expressão aproximada para  $v'$ .

Temos

$$\sin \phi \cong \text{tg} \phi \cong \phi$$

e

$$\cos \phi \cong (1 - \text{sen}^2 \phi)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 \phi \cong 1 - \frac{\phi^2}{2}.$$

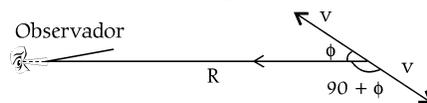
Logo,

$$v' = \frac{\beta c \phi}{1 - \beta + \frac{\beta \phi^2}{2}}.$$

Se admitimos que  $v \cong c$ , temos  $\beta \cong 1$  e  $v' = 2c/\phi$ .

Veja que, quando  $\phi = 2 \text{ rad}$ ,  $v' = c$ . Portanto, para todo ângulo menor que  $2 \text{ rad}$ , a velocidade aparente do objeto é maior que a velocidade da luz.

c) Observe a figura abaixo.



Os objetos se movem em sentidos opostos, sendo  $\phi$  o ângulo do objeto 1, na figura acima. Queremos uma expressão para esse ângulo  $\phi$  e para a razão  $\beta$  em termos das velocidades angulares  $w_1$  e  $w_2$  dos objetos e da distância média  $R$ .

Usando os ângulos vistos na figura, obtemos:

$$w_1 = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}$$

e

$$w_2 = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 + \beta \cos \phi)}.$$

Usando essas expressões e um pouco de álgebra, chegamos a uma expressão para o ângulo:

$$\phi = \text{arctg} \left( \frac{2Rw_1 w_2}{c(w_1 - w_2)} \right).$$

Do mesmo modo, obtemos a relação:

$$\beta = \frac{w_1 - w_2}{\cos \phi (w_1 + w_2)}.$$

Agora, basta usar os valores de  $w_1$  e  $w_2$  obtidos no item (a), além do valor dado de  $R$  e temos:

$$\phi = \text{arctg} (2,56) = 1,2 \text{ rad} = 69^\circ$$

e

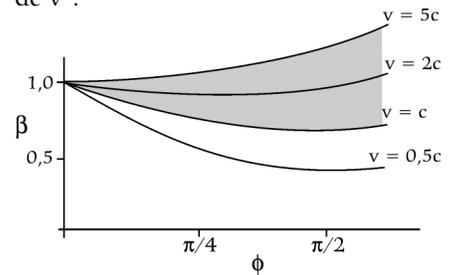
$$\beta = 0,89.$$

d) Condição para que  $v' > c$ .

Como  $v' = \beta c \sin \phi / (1 - \beta \cos \phi)$ , vemos que  $v' > c$  quando  $\beta \sin \phi / (1 - \beta \cos \phi) > 1$ .

Isso equivale a  $\beta > 1/(\sin \phi + \cos \phi)$ .

Podemos, então, traçar várias curvas de  $\beta = \beta(\phi)$  para vários valores de  $v'$ .



A figura acima mostra a região em que  $v' > c$ , como pedido.

e) Para achar  $v'_{\text{max}}$  derivamos  $v'$  em relação a  $\phi$  e igualamos a zero. Obtemos:

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{v'}{c} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

Logo,  $\cos \phi_{\text{max}} = \beta$ .

Portanto,

$$v'_{\text{max}} = \frac{\beta c \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Assim, quando  $\beta \rightarrow 1$ ,  $v'_{\text{max}} \rightarrow \infty$ .

f) Usamos as expressões para o deslocamento Doppler, dadas no texto do problema:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{1 - \beta \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{1 + \beta \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Somando uma com a outra, podemos retirar o valor de  $\beta$  pedido:

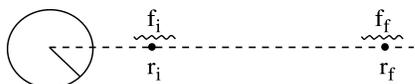
$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Portanto, o coeficiente vale 4.

## 5 Deslocamento gravitacional para o vermelho e medida de massa estelar.

a) A primeira coisa a fazer é calcular a chamada “massa efetiva” do fóton. Esse cálculo utiliza duas das mais importantes equações da física: a famosa equação de Einstein,  $E = mc^2$ , e a relação de Planck entre a energia do fóton e sua frequência,  $E = hf$ . Combinando as duas, obtemos a massa do fóton como:  $m = hf/c^2$ .

Um fóton emitido da superfície de uma estrela perde energia para vencer a atração gravitacional. Quando a energia  $E$  diminui, a frequência  $f$  deve diminuir, pois a velocidade da luz,  $c$ , é constante.



Consideremos um fóton em duas posições diferentes, deixando uma estrela de massa  $M$  e raio  $R$ .

Na posição que dista  $r_i$  do centro da estrela, a frequência do fóton é  $f_i$ . Na posição mais distante,  $r_f$ , a frequência é  $f_f$ .

Como sabemos, a energia potencial gravitacional de um corpo de massa  $m$ , distando  $r$  de outro de massa  $M$ , é dada por  $E = -GMm/r$ , onde o sinal negativo indica atração entre os corpos.

A energia potencial do fóton nas posições  $r_i$  e  $r_f$  será, portanto:

$$E_i = -GMm/r_i \quad \text{e} \quad E_f = -GMm/r_f$$

A energia total do fóton deve ser constante. Logo:

$$hf_i - GMm/r_i = hf_f - GMm/r_f$$

donde:

$$h(f_i - f_f) = h\Delta f = GMm \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right]$$

Usando  $m = hf/c^2$  nessa equação, obtemos:

$$h\Delta f = GM \frac{hf}{c^2} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right]$$

Logo:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right]$$

Se o fóton sair da superfície da estrela e escapar completamente da atração gravitacional, teremos

$$r_i = R \quad \text{e} \quad r_f = \infty,$$

donde

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{c^2 R}$$

O sinal negativo indica que a frequência diminui quando o fóton se afasta da estrela. Isto é, o comprimento de onda do fóton aumenta. Essa é a razão de se dizer que houve “deslocamento para o vermelho” devido à atração gravitacional.

b) A relação achada no item anterior fornece a razão  $M/R$  da estrela, medindo-se  $f$  e  $\Delta f$ . O enunciado desse item sugere um modo de se obter os valores de  $M$  e  $R$ , separadamente.

Fótons são emitidos por íons de hélio na superfície da estrela e devem ser absorvidos por outros íons de hélio em uma nave que está a uma distância  $d$  da superfície da estrela. Para que isso aconteça, é necessário que a energia do fóton, ao chegar à nave, seja exatamente igual à energia com que foi emitida na estrela. Mas, de acordo com o que vimos no item anterior, há um decréscimo na frequência do fóton ao ir da estrela até a nave. Logo, sua energia não será suficiente para excitar o íon de hélio na nave.

A diferença relativa de frequência do fóton entre a superfície da estrela e a nave é

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right]$$

Para compensar essa perda de energia, usa-se o efeito Doppler. Move-se o íon de hélio da nave com velocidade  $v$  na direção do fóton que chega. Bastará imprimir uma velocidade que seja suficiente para compensar a perda de energia por efeito gravitacional.

Se a frequência do fóton, ao chegar à nave, for  $f_o$ , a frequência observada por um íon que se move com velocidade  $v$  na direção desse fóton será:

$$f = \frac{f_o}{1 - \frac{v}{c}} \quad (\text{Doppler})$$

Chamando  $v/c$  de  $\beta$ , teremos:

$$f = \frac{f_o}{1 - \beta} \quad \therefore f - f\beta = f_o \quad \therefore f - f_o = \Delta f = f\beta$$

ou

$$\frac{\Delta f}{f} = \beta$$

Para que haja absorção (ou ressonância, como se diz) entre o fóton e o íon, basta que as duas variações relativas de frequência, uma devida à gravitação e a outra devida ao efeito Doppler, se compensem mutuamente. Em outras palavras, basta que a soma delas seja zero.

$$-\left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right] + \beta = 0$$

Daí, vem:

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right] = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right] = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{d}{R(R+d)} \right]$$

O texto do problema nos dá uma tabela com os valores obtidos experimentalmente da velocidade necessária para haver absorção em diferentes distâncias  $d$  até a superfície da estrela. Desses números, queremos obter  $M$  e  $R$ , separadamente.

Cabe usar, nesse ponto, um truque esperto, convertendo a curva da equação acima em uma reta. Isso se consegue invertendo a equação toda. Ficamos com:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{c^2}{GM} \left[ \frac{R(R+d)}{d} \right] = \frac{c^2 R^2}{GM} \left[ \frac{1}{d} + \frac{1}{R} \right]$$

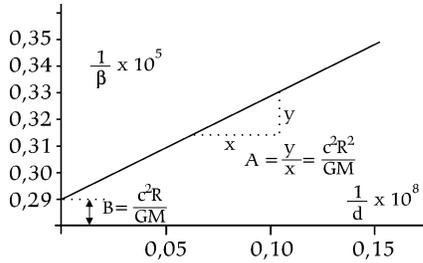
Chamando  $x = 1/d$ ,  $y = 1/\Delta$ ,  $A = c^2 R^2 / GM$  e  $B = A/R$  a equação fica sendo, simplesmente,  $y = Ax + B$ , isto é,

a equação de uma reta.

Antes de traçarmos essa reta fazemos uma mudança de escala conforme mostrado na tabela abaixo:

$1/\beta$ ( $10^{-8} \text{ m}^{-1}$ )	0,0260	0,0500	0,075	0,111	0,500
$1/d$ ( $10^5 \text{ m}^{-1}$ )	0,2980	0,305	0,313	0,325	0,338

Com os números dessa tabela traçamos um gráfico semelhante ao visto na figura abaixo.



Dele, tiramos a interseção

$$B = 0,29 \times 10^5$$

e a inclinação

$$A = B / R = 3,2 \times 10^{12}.$$

Daí, obtemos

$$R = B / A = 1,10 \times 10^8 \text{ metros.}$$

Substituindo esse valor de R em A, obtemos a massa M da estrela:

$$M = c^2 R^2 / A G = 5,11 \times 10^{30} \text{ kg.}$$

c) Pedese que mostremos que o efeito de recuo nos átomos de hélio, ao emitir ou absorver fótons, é desprezível. Realmente, ao emitir um fóton, o átomo "rouba" um pouco da energia emitida para recuar, como um rifle ao atirar uma bala. Se o átomo, antes da emissão, tem massa de repouso  $m_0$ , depois dela terá massa  $m_0' < m_0$ . A energia total antes da emissão será apenas a energia de repouso do átomo  $m_0 c^2$ . A energia total depois da emissão será:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m_0')^2 c^4} + hf.$$

A diferença de energia que vai para o fóton é:

$$\Delta E = (m_0 - m_0') c^2.$$

A conservação de energia dá:

$$m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + (m_0')^2 c^4} + hf.$$

A conservação do momentum dá:  $p = hf/c$ , onde p é o momentum do átomo no recuo.

Depois de uma pequena álgebra usando essas expressões acima, achamos:

$$hf = \Delta E \left[ 1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right].$$

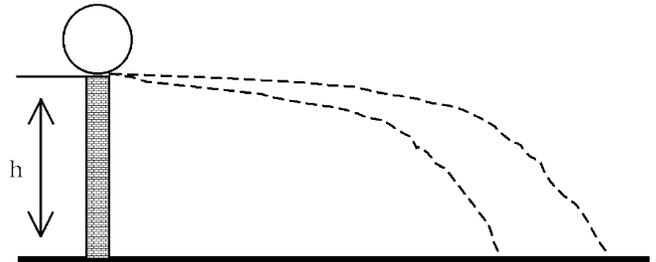
Lembre que  $m_0 c^2$  é a energia de repouso do átomo e  $\Delta E$  é a energia do fóton.

Pelos dados, vemos que a energia de repouso do átomo de hélio é da ordem de 4000 Mev, enquanto a energia do fóton emitido é, no máximo, 24,5 eV.

Logo, o deslocamento da frequência f devido ao recuo é muito pequeno comparado com  $\Delta f$  devido à gravidade.

## Novos Problemas

**1** Uma bola de massa  $M = 0,2 \text{ kg}$  repousa sobre um poste vertical de altura  $h = 5 \text{ m}$ . Um projétil de massa  $m = 0,01 \text{ kg}$  desloca-se com uma velocidade de  $500 \text{ m/s}$  na direção horizontal antes de passar pelo centro da bola. A bola atinge o solo a uma distância de  $20 \text{ m}$  a partir da base do poste.

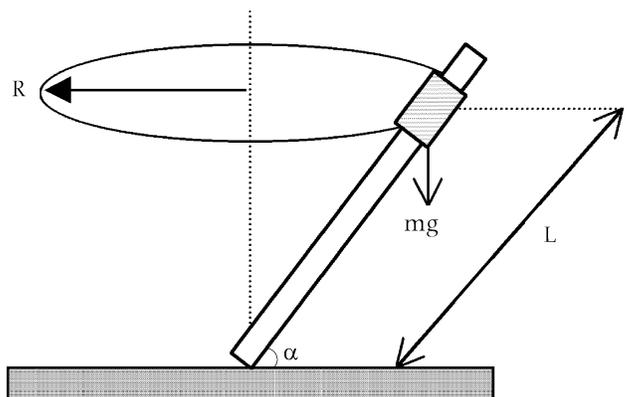


- Determine a que distância o projétil atingirá o solo.
- Quanta energia cinética do projétil é transformada em calor?

I OIF

Varsóvia, Polônia (1967)

**2** Uma vareta de madeira fazendo um ângulo  $\alpha$  com o eixo dos x gira com velocidade angular  $\omega$ . Colocado na vareta há um anel de massa m que pode deslizar para cima ou para baixo na vareta. O coeficiente de atrito entre o anel e a vareta é igual a  $\text{tg}(\theta)$ .



Ache a condição para que o anel esteja a uma distância L medida a partir da base da vareta quando a vareta roda com a velocidade angular  $\omega$ .

VIII OIF

Gustrow,

Republica Democrática Alemã