Matheus Pereira Lobo*,
Sue Lam Rhâmidda Pereira Gomes,
Ednalva Alves de Alencar,
Caio Matheus Fontinele dos Santos
Universidade Federal do Tocantins,
Araguaína, TO, Brasil
*E-mail: mplobo@uft.edu.br

Neste trabalho propomos a realização teórica do teleporte quântico de uma partícula por meio de cálculos envolvendo equações com duas variáveis (*x* e *y*). Demonstramos a importância do emaranhamento – que é fundamental para o teleporte – a partir de um protocolo envolvendo três partículas. O objetivo é proporcionar aos professores e estudantes do Ensino Médio uma forma didática de compreender o tema, integrando a visão qualitativa com os procedimentos matemáticos. Os pré-requisitos incluem números complexos, propriedade distributiva, igualdade de polinômios e produto de matrizes. Com isso, acreditamos poder inserir temas avançados de física contemporânea a partir de ferramentas matemáticas presentes no cotidiano escolar dos estudantes do Ensino Médio.

Introdução

O emaranhamento representa uma ligação especial não completamente compreendida pela comunidade científica [1], mas confirmada por inúmeros experimentos [2]. Ele ocorre, por exemplo, quando os estados de duas (ou mais) partículas são inseparáveis. Em certo sentido, o emaranhamento pode ser considerado um caso particular de superposição de estados quânticos separados espacialmente [3]. Em linguagem simples, superposição de estados significa uma partícula poder ocupar mais de um estado ao mesmo tempo, como por exemplo, poder estar em duas ou mais regiões distintas. Dizemos que uma partícula colapsa quando se faz uma medição em algum de seus observáveis (posição, momento, polarização, spin etc). Isso significa que de todos os possíveis estados, apenas um deles é observado diretamente após a medição. No caso de duas partículas emaranhadas, a medição em uma partícula altera a propriedade da outra partícula. Há estudos, no entanto, para averiguar se essa alteração é realmente instantânea ou se ocorre a uma velocidade muito grande, acima da velocidade da luz [4]. Vale ressaltar, no entanto, que a não-localidade não é uma característica exclusiva do emaranhamento, tampouco representa sua definição. Em outras palavras, há estados não emaranhados com correlações não-locais.

O emaranhamento representa uma ligação especial não completamente compreendida pela comunidade científica, mas confirmada por inúmeros experimentos. Ele ocorre, por exemplo, quando os estados de duas (ou mais) partículas são inseparáveis

O teleporte é uma realização física, fruto do emaranhamento quântico e tem sido estudado em diferentes protocolos e confirmado por diversos experimentos [2]. A primeira realização experimental do teleporte ocorreu em 1997 com um único fóton [5]. Recentemente, um estado quântico foi teleportado até um satélite a cerca de 1.400 km [6]. Além do teleporte, as aplicações do emaranhamento incluem criptografia, comunicação e computação quântica [7], entre outras.

Antes de iniciarmos, é bom destacar que nesse contexto é comum denominar os sistemas A e B por Alice e Bob, respectivamente (Fig. 1). Cada um desses sistemas é composto por um conjunto de partículas e está separado espacialmente por uma distância arbitrária. A ideia aqui é teleportar a informação de uma partícula quântica de A até B e não propriamente a partícula em si. Veremos o protocolo mais simples para o teleporte da informação de uma partícula em um estado desconhecido do sistema A para o sistema B [8]. Para isso, serão necessárias três partículas, a partícula original X (a ser teleportada), a partícula final Z (que se transformará em uma cópia de X) e a partícula Y (intermediadora). Veja a Fig. 2.

As equações para o protocolo de teleporte

Trabalharemos aqui com equações de duas variáveis para a realização do teleporte de uma partícula. Considere as seguintes funções das variáveis x_i, y_i e z_i, com $i = 1{,}2$,

$$g^{\pm}_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 y_2 \pm x_2 y_1), \tag{1}$$

$$h^{\pm}_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 y_1 \pm x_2 y_2), \tag{2}$$

$$g^{\pm}_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 z_2 \pm y_2 z_1), \tag{3}$$

Figura 1: Alice (na Terra) teleportará uma partícula para Bob (em Marte).

$$h^{\pm}_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1z_1 \pm y_2z_2). \tag{4}$$

Trata-se de um sistema com 8 equações e 6 variáveis. g_{yz} e h_{yz} foram obtidas substituindo-se *xy* por *yz* nas definições de g_{xy} e h_{xy}. Note que o índice ± refere-se à soma ou à subtração de seus termos. As funções g_{xy} e g_{yz} representam um sistema com as partículas XY e YZ emaranhadas, respectivamente. O mesmo vale para h_{xy} e h_{yz}. As Eqs. (1)-(4) representam a base de Bell [8], frequentemente chamada de estados EPR ou estados emaranhados.

Os estados quânticos – aqui representados por $g^{\pm}_{xy}$, $h^{\pm}_{xy}$, $g^{\pm}_{yz}$ e $h^{\pm}_{yz}$ – são vetores em um espaço complexo denominado espaço de Hilbert. Vetores são entidades matemáticas que obedecem certas propriedades e são utilizadas para descrever sistemas físicos (o leitor curioso em conhecer tais propriedades poderá consultar um livro de álgebra linear). O espaço de Hilbert pode ter um número finito ou infinito de dimensões e contém vetores representados por números complexos. Neste artigo, estamos interessados apenas em manipular esses estados por meio da álgebra elementar, envolvendo números complexos, propriedade distributiva da multiplicação de expressões algébricas, igualdade de polinômios e produtos de matrizes. Por isso trataremos, a partir de agora, esses estados quânticos (vetores no espaço de Hilbert) simplesmente como variáveis x e y.

Assim, temos que x_i, y_i e z_i representam, respectivamente, os estados das partículas X, Y e Z. Cada partícula pode estar em uma superposição de estados 1 e 2. Esses estados podem representar a polarização de um fóton ou o spin do elétron, por exemplo, pois tanto a polarização do fóton como o spin do elétron são dados por apenas dois estados. As Eqs. (1)-(4) são superposições de estados quânticos emaranhados, o índice *xy* de *g* e *h* significa que as partículas X e Y estão emaranhadas e *yz* significa o emaranhamento entre as partículas Y e Z. Note que é impossível escrevermos g_{xy}, g_{yz}, h_{xy} e h_{yz}, como um produto de uma função de x_i com uma função de y_i. Por exemplo, $g_{xy}(x_1, x_2, y_1, y_2) \neq g_x(x_1, x_2).g_y(y_1, y_2)$, isto é, o estado da partícula X, $g_x(x_1, x_2)$, não pode ser separado do estado da partícula Y, $g_y(y_1, y_2)$. Em outras palavras, a inseparabilidade do sistema caracteriza o emaranhamento. É por isso que partículas emaranhadas podem ser vistas como se fossem estados distintos de um único sistema. Em informação quântica, existem diferentes medidas de emaranhamento para caracterizá-lo mediante todas as possíveis bases. Por exemplo, fazendo uma analogia clássica, é como uma moeda girando (um único sistema) composta por dois estados distintos coexistindo (cara e coroa). Enquanto a moeda está girando, ela está em superposição de estados (cara e coroa); quando ela para de girar e cai sobre a mesa, por exemplo, ocorre o colapso, apenas uma de suas faces aparece virada para cima (Fig. 3).

Teleporte da partícula X

Inicialmente temos um sistema composto por três partículas, X, Y e Z. A partícula X encontra-se na superposição de estados

$$f_x = ax_1 + bx_2, \tag{5}$$

sendo *a* e *b* números complexos que satisfazem a seguinte condição de normalização

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{6}$$

Na teoria quântica, $|a|^2$ e $|b|^2$ representam as probabilidades de encontrarmos a partícula X nos estados x_1 e x_2, respectivamente. Por isso a Eq. (6) é igual a 1, porque a partícula encontra-se em um dos dois estados possíveis.

Suponha que as partículas Y e Z estejam emaranhadas na forma de g^-_{yz} [Eq. (3)]. Assim, temos que o sistema de três partículas é dado por $f_xg^-_{yz}$. Substituindo as Eqs. (3) e (5) em $f_xg^-_{yz}$, temos

$$f_xg^-_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-ax_1y_2z_1 + bx_2y_1z_2 + ax_1y_1z_2 - bx_2y_2z_1\big). \tag{7}$$

Nosso objetivo aqui é teleportar a partícula X de Alice para Bob. Como nos filmes de ficção científica, será necessário "destruir" X para transferir sua informação para a partícula Z ou, para sermos mais precisos, X e Y deverão colapsar em um estado particular para que Z também

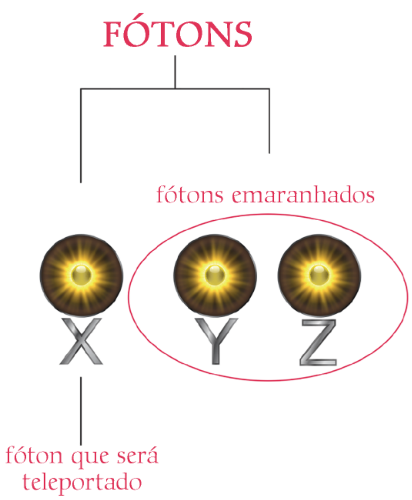

Figura 2: Ilustração das três partículas utilizadas para o teleporte.

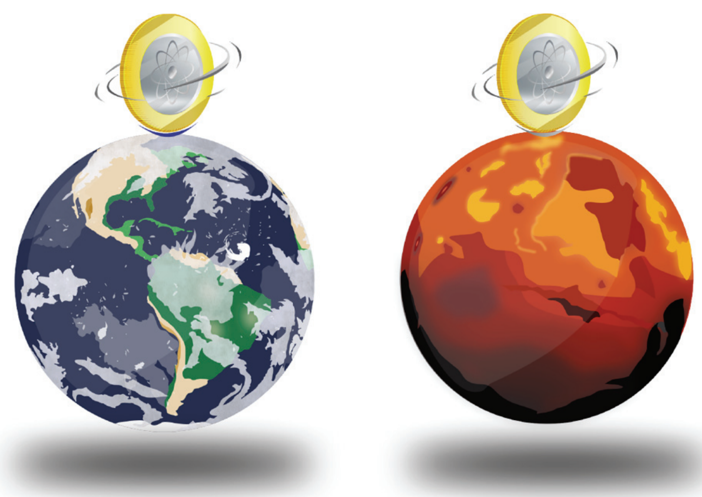

Figura 3: Diagrama ilustrando um análogo clássico com duas moedas emaranhadas girando, uma na Terra e outra em Marte.

colapse. Com isso, será possível aplicar uma transformação tal que Z seja idêntica a X. As partículas X e Y permanecem com Alice e a partícula Z é enviada para Bob.

O teleporte será realizado por meio de dois passos: (i) primeiro, pela transferência do emaranhamento, de YZ para XY; (ii) depois, por meio de um canal de comunicação clássico, limitado pela velocidade da luz (WhatsApp, por exemplo).

Para transferirmos o emaranhamento de YZ para XY, precisamos fazer a seguinte transformação matemática

$$f_x g_{yz}^- = g_{xy}^-\alpha + g_{xy}^+\beta + h_{xy}^-\gamma + h_{xy}^+\delta. \qquad (8)$$

O lado esquerdo da Eq. (8) diz que o sistema é composto pela superposição de estados da partícula X, dado por f_x, e pelo emaranhamento de Y e Z, dado por g_{yz}^-. O lado direito da Eq. (8) significa que a partícula Z (aqui representada pelos produtos envolvendo α, β, γ e δ) está em uma superposição de quatro estados de emaranhamento XY, representados por g_{xy}^-, g_{xy}^+, h_{xy}^- e h_{xy}^+.

O próximo passo é descobrir quem são α, β, γ e δ. Substituindo as Eqs. (1) e (2) na Eq. (8),

$$f_x g_{yz}^- = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x_1y_1 - x_2y_2) + \frac{\delta}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2),$$

temos

$$f_x g_{yz}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[x_1y_2(\alpha+\beta) + x_2y_1(-\alpha+\beta) + x_1y_1(\gamma+\delta) + x_2y_2(-\gamma+\delta)\big]. \qquad (9)$$

Igualando a Eq. (7) com a Eq. (9), encontramos

$$-a\underline{x_1y_2}z_1 + b\underline{x_2y_1}z_2 + a\underline{x_1y_1}z_2 - b\underline{x_2y_2}z_1 = \\ = \underline{x_1y_2}(\alpha+\beta) + \underline{x_2y_1}(-\alpha+\beta) + \\ + \underline{x_1y_1}(\gamma+\delta) + \underline{x_2y_2}(-\gamma+\delta).$$

Essa equação é uma identidade polinomial. Igualando o coeficiente de x_1y_2 dos lados esquerdo e direito, temos

$$-az_1 = \alpha + \beta. \qquad (10)$$

Fazendo o mesmo para x_2y_1, x_1y_1 e x_2y_2 temos, respectivamente,

$$bz_2 = -\alpha + \beta, \qquad (11)$$

$$az_2 = \gamma + \delta, \qquad (12)$$

$$-bz_1 = -\gamma + \delta. \qquad (13)$$

Subtraindo as Eqs. (10) e (11),

$$\alpha = -\frac{1}{2}(az_1 + bz_2). \qquad (14)$$

Somando as Eqs. (10) e (11),

$$\beta = \frac{1}{2}(-az_1 + bz_2). \qquad (15)$$

Subtraindo as Eqs. (12) e (13),

$$\gamma = \frac{1}{2}(az_2 + bz_1). \qquad (16)$$

Somando as Eqs. (12) e (13),

$$\delta = \frac{1}{2}(az_2 - bz_1). \qquad (17)$$

Substituindo α, β, γ e δ na Eq. (8),

$$f_x g_{yz}^- = \frac{1}{2}\Big[g_{xy}^-(-az_1 - bz_2) + g_{xy}^+(-az_1 + bz_2) + h_{xy}^-(az_2 + bz_1) + h_{xy}^+(az_2 - bz_1)\Big]. \qquad (18)$$

O parêntesis do lado direito da Eq. (18) refere-se à partícula Z. A informação da partícula original X, a ser teleportada, que está no estado geral f_x, é dada pela Eq. (5). Alice faz agora uma medição conjunta das partículas emaranhadas X e Y, podendo obter um dos seguintes resultados: g_{xy}^-, g_{xy}^+, h_{xy}^- ou h_{xy}^+. Em outras palavras, quando o sistema XY colapsa, Z também colapsa.

Na Eq. (18), temos quatro estados de superposição para o sistema XYZ, dados pelos termos que contém g_{xy}^-, g_{xy}^+, h_{xy}^- e h_{xy}^+. Esses, por sua vez, também são estados de superposição [veja Eqs. (1)-(2)]. Assim, temos uma superposição de segunda ordem, isto é, uma superposição da superposição. Medir XY significa colapsar o sistema em apenas uma das quatro superposições mencionadas (base de Bell). Note que se Alice medisse apenas a partícula X, ela colapsaria e, portanto, não poderia mais ser teleportada como um sistema quântico. Medição conjunta é um termo que vem do inglês (*joint measurement*) [9] e significa medir mais de uma variável aleatória simultaneamente (Fig. 4).

A Tabela 1 mostra todos os possíveis resultados para a medição em conjunto de XY e o estado da partícula colapsada Z, conforme a Eq. (18).

Figura 4: Na medição conjunta, o sistema XY colapsa em uma das quatro bases de Bell. Os estados das partículas individuais não são conhecidos.

O estado da partícula X pode ser mais bem representado por uma matriz, da seguinte maneira

$$f_x = ax_1 + bx_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

isto é, a primeira linha da matriz coluna representa o estado 1 (por meio da variável x_1) e a segunda linha representa o estado 2 (por meio de x_2).

Para que o teleporte seja bem-sucedido, devemos ter $f_z = f_x$ porque o estado de Z deve ser idêntico ao de X. Para cada um dos valores colapsados de Z, temos uma matriz correspondente que transforma Z em X. Essas matrizes são

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

pois quando aplicadas em cada um dos valores medidos para XY (Tabela 1), transformam Z em X,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

As matrizes (20) são facilmente obtidas por dedução lógica, a partir das formas matriciais de Z colapsado (Tabela 1) e de f_x.

Portanto, para finalizar o teleporte da partícula X, Alice deverá enviar para Bob o resultado de sua medição em conjunto (XY), dado por uma dessas quatro matrizes (20), por meio do canal clássico de comunicação. É importante salientarmos que o teleporte não é instantâneo, pois depende da comunicação clássica do resultado de uma medição para que ele seja

Tabela 1: O lado esquerdo representa o colapso das partículas X e Y e o lado direito representa o colapso de Z.

XY (medido)	Z (colapsado)
g_{xy}^-	$f_z = -az_1 - bz_2$
g_{xy}^+	$f_z = -az_1 + bz_2$
h_{xy}^-	$f_z = az_2 + bz_1$
h_{xy}^+	$f_z = az_2 - bz_1$

bem-sucedido. Caso o teleporte fosse instantâneo, isso violaria a relatividade especial, ao menos na forma como a conhecemos atualmente [10].

Considerações finais

A informação quântica lida com a informação contida em estados quânticos, bem como suas possíveis utilizações. O emaranhamento é o elemento chave para o teleporte quântico, algoritmos para computação, criptografia e comunicação quântica, entre outras aplicações. No Brasil, há laboratórios produzindo estados emaranhados, especialmente para o desenvolvimento da computação e criptografia quântica, e grupos teóricos investigando as propriedades do emaranhamento e de seus efeitos associados [11]. O leitor interessado encontrará mais informações a respeito desses grupos brasileiros pesquisando no Google e no Diretório dos Grupos de Pesquisa do CNPq.

Por meio deste trabalho, esperamos divulgar a área de informação quântica, que é de extrema importância para o avanço da ciência, tecnologia, sociedade e ambiente. Reiteramos nosso compromisso de utilizar a matemática disponível no Ensino Médio aplicada a um tema avançado, reafirmando nosso objetivo de proporcionar aos professores e estudantes uma forma didática de compreender o tema em questão. Outra vantagem de utilizar essa notação matemática, em vez da famigerada notação de Dirac, é poder estimular mudanças de paradigma que tal posicionamento possa permitir em realizações posteriores.

Embora alguns tópicos de física moderna estejam presentes nos conteúdos programáticos do Ensino Médio, muitos estudantes não têm contato com eles. O presente artigo pode servir como mediador dos conhecimentos científicos ao desmistificar os conceitos de teleporte e emaranhamento quântico, mostrando que não se trata de mera ficção científica, mas faz parte de um amplo espectro de possibilidades tecnológicas na atual era da informação quântica.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal do Tocantins por oferecer toda a infraestrutura necessária para a realização deste trabalho, ao Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF) da Sociedade Brasileira de Física (SBF) e ao CNPq pelo apoio financeiro. Em especial, destacamos nossos fortes agradecimentos aos professores idealizadores do MNPEF da SBF, Nelson Studart e Marco Antonio Moreira.

References

[1] A.D. Aczel, *Entanglement: The Greatest Mystery in Physics: The Phenomenon that Reimagines Space and Time– And What it Means for Black Holes, the Big Bang, and Theories of Everything* (Macmillan, London, 2015).

[2] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Reviews of Modern Physics **81**, 865 (2009).

[3] G. Musser, *Spooky Action at a Distance* (Scientific American / Farrar, Straus and Giroux, New York, 2016).

[4] J. Yin, Y. Cao, H.-L. Yong, J.-G. Ren, H. Liang, *et al.*, Physical Review Letters **110**, 260407 (2013).

[5] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger, Nature **390**, 575 (1997).

[6] J.-G. Ren, P. Xu, H.-L. Yong, L. Zhang, S.-K. Liao, J. Yin, *et al.*, arXiv preprint quant-ph/1707.00934 (2017).

[7] A.C. Santos, Revista Brasileira de Ensino de Física **39**, e1301 (2017).

[8] A. Miranowicz and K. Tamaki. arXiv preprint quant-ph/0302114 (2003).

[9] N. Gisin, *Quantum Chance: Nonlocality, Teleportation and Other Quantum Marvels* (Springer, New York, 2014).

[10] E.F. Taylor and J.A. Wheeler, *Spacetime Physics* (W.H. Freeman and Company, New York, 1992), 2^{nd} ed.

[11] L. Davidovich, Ciência Hoje **35**, 24 (2004).