

Demonstrações matemáticas como fator de aprimoramento para o ensino de astronomia



Rodrigo José da Silva^{1, #}  e Edson Pereira Gonzaga²

¹Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, MG, Brasil.

²Universidade Cruzeiro do Sul, Campus Liberdade, São Paulo, SP, Brasil.

RESUMO

Partindo-se da intrínseca interdisciplinaridade presente na astronomia e assumindo o relevante papel das demonstrações matemáticas no processo de construção mental, o presente artigo tem por objetivo a proposição de duas demonstrações matemáticas, de própria autoria, a serem utilizadas como ferramentas de ensino, as quais possuem como base a interdisciplinaridade e a meta de maior assimilação e concretização, por parte do alunado, de conceitos abstratos. A primeira demonstração recai sobre o cálculo da distância entre observador e horizonte, em função da altura à qual o observador encontra-se posicionado em relação à superfície terrestre. A segunda demonstração é uma adaptação matemática para a efetiva explicação da ocorrência de maiores temperaturas quando os raios solares incidem a pino (perpendicularmente) em determinada região do planeta.

Palavras-chave: ensino de astronomia; demonstrações matemáticas; interdisciplinaridade



1. Introdução

Conforme a Ref. [1], apesar de a astronomia consistir na ciência natural mais antiga, ela não possui uma metodologia de ensino bem definida nos centros educacionais básicos, uma vez que é geralmente reservada às esferas mais adiantadas do ensino. Consequentemente, diversos são os estudos que buscam aprimorar métodos aplicados ao ensino de astronomia para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Ainda segundo os autores, a astronomia apresenta caráter interdisciplinar, uma vez que mantém relação com todos os campos do conhecimento (Fig. 1), podendo-se usar todos os processos para se ensinar astronomia, bastando para isso compor um quadro criativo de aprendizado.

Conforme a Ref. [2], a interdisciplinaridade é a ferramenta de ensino que retoma o caráter de interdependência e interatividade existente entre as coisas e as ideias, à medida que resgata a visão de contexto da realidade e demonstra que a humanidade vive numa grande rede ou teia de interações com-

plexas. Ainda segundo o autor, a interdisciplinaridade recupera a tese de que todos os conceitos e teorias estão conectados entre si.

Dessa maneira, entre os processos para o ensino de astronomia, destaque-se, de forma intrínseca, sua mencionada interdisciplinaridade. Conforme a Ref. [3], a interdisciplinaridade é uma atitude frente à questão do conhecimento, uma atitude de abertura à compreensão de aspectos ocultos do ato de aprender. Portanto, a demonstração matemática atua de forma efetiva na interdisciplinarização de conceitos e concretização de fatos abstratos, pois:

“(...) a matemática, de forma ímpar, é uma ciência derivada do pensamento puro, constituindo-se essencialmente em um processo de construção mental. Dessa maneira, suas atividades caracterizam-se pela formulação de conjecturas que se validam quando acompanhadas das devidas demonstrações.” [4]

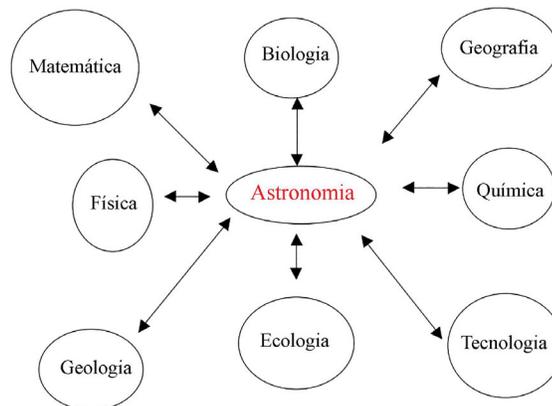


Figura 1 - Campos do conhecimento que se relacionam com a astronomia. Fonte: Ref. [1].

#Autor de correspondência. E-mail: js.rodrigo@hotmail.com.

1.1. Objetivo geral

Pretende-se construir um quadro criativo para a consolidação do aprendizado do alunado mediante a interdisciplinarização por meio de demonstrações matemáticas e conceitos físicos. Pretende-se propor meios de se obter maior assimilação, por parte do alunado, de conceitos que comumente não são apresentados de forma analítica, mas teórica.

1.2. Objetivos específicos

O presente trabalho tem por objetivos específicos:

- a realização de duas demonstrações matemáticas de autoria própria;
- mediante as demonstrações, tratar de forma interdisciplinar dois problemas comuns no ensino de astronomia: um sobre a curvatura terrestre e outro sobre as estações do ano;
- propor melhor assimilação de conceitos físicos, como a óptica e a energia, e de conceitos matemáticos, como a geometria plana e manipulações algébricas.

2. Desenvolvimento

A primeira demonstração recai sobre o cálculo da distância do horizonte a um observador posicionado a determinada altura em relação à superfície terrestre. Já a segunda pretende evidenciar, de forma analítica, o motivo da ocorrência de maiores temperaturas no verão, quando o sol está a pino sobre a região da Terra em questão. Para ambas as demonstrações são realizadas hipóteses conceituais de própria autoria, por meio da exploração de conceitos geométricos e manipulações algébricas apresentadas passo a passo.

2.1. Demonstração I – cálculo da distância do horizonte a um observador localizado a determinada altura sobre a superfície da Terra

A presente demonstração pode ser aplicada como um aprimoramento ao ensino de conceitos relacionadas à curvatura da Terra e ao horizonte. Diversos autores, como na Ref. [5], ilustram a Terra como uma circunferência perfeita. Idealiza-se, portanto, a Terra como um círculo de raio r e centro O , bem como um observador adimensional sobre o ponto A da superfície terrestre e localizado a uma altura h conforme a Fig. 2. A presente demonstração propõe o cálculo da distância, em metros, do observador ao horizonte.

Segundo [6], desde a antiguidade já

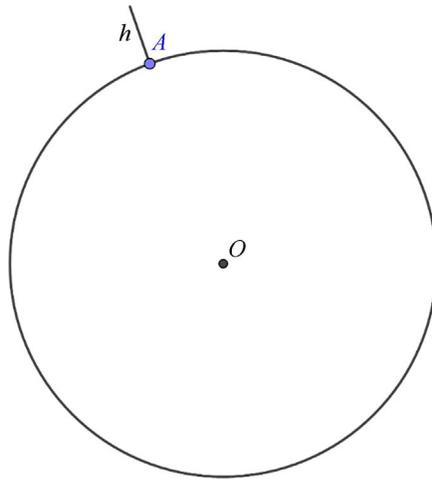


Figura 2 - Terra idealizada como uma circunferência de centro O e observador sobre a superfície em A , a uma altura h .

se conhecia a propagação retilínea da luz (ou da visão). Em síntese, a luz se propaga em linha reta e a capacidade humana de enxergar objetos se dá através da luz que aqueles emitem ou refletem, conforme a Fig. 3. Por conseguinte, inicialmente pode ser apresentado ao alunado o princípio óptico da propagação retilínea da luz.

Na sequência, conforme a Fig. 4, o ponto sobre a superfície terrestre mais distante dos olhos do observador (o horizonte – ponto B) encontra-se a uma distância d : a distância em linha reta percorrida pela luz desde o horizonte visível até os olhos do observador. O segmento que representa a distância d é tangente à circunferência em B . A distância entre os pontos A e B , sobre a superfície terrestre, é representada pelo arco de circunferência d' .

A Fig. 5 apresenta os segmentos $\overline{AO} = \overline{BO} = r$. Obtém-se então um triângulo retângulo de hipotenusa $(h + r)$ com catetos d e r . O teorema de Pitágoras pode então ser aplicado conforme a Eq. (1):

$$(h + r)^2 = r^2 + d^2. \quad (1)$$

A manipulação da Eq. (1) para a deter-

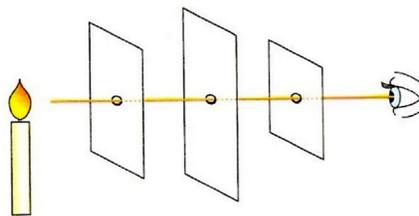


Figura 3 - Propagação retilínea da luz. Fonte: e-Física.

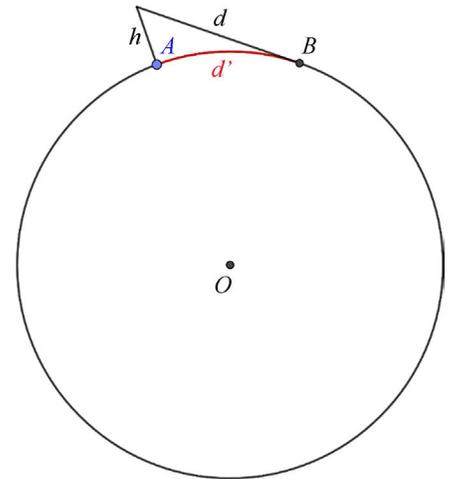


Figura 4 - Distâncias d (percorridas pela luz) e d' (sobre a superfície terrestre) entre observador e horizonte.

minação de d se dá conforme as Eqs. (2)–(4),

$$h^2 + 2hr + r^2 = r^2 + d^2, \quad (2)$$

$$d^2 = h^2 + 2hr, \quad (3)$$

$$d = \sqrt{h^2 + 2hr}, \quad (4)$$

nas quais d é a distância em linha reta percorrida pela luz desde o horizonte visível até os olhos do observador, em função da altura h à qual o observador se encontra em relação à superfície terrestre e do raio r da Terra.

O ângulo Φ (Fig. 5), em radianos, pode ser relacionado com d e r através das funções tangente e sua inversa, conforme a Eq. (5) e a Eq. (6),

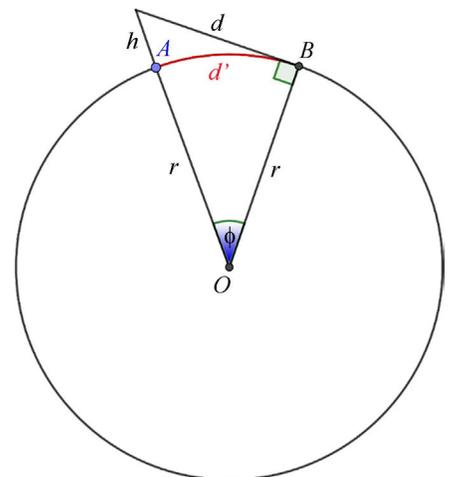


Figura 5 - Triângulo retângulo de hipotenusa $(h + r)$ com catetos d e r .

$$\operatorname{tg}(\Phi) = \frac{d}{r}, \quad (5)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{r}\right), \quad (6)$$

e substituindo a Eq. (4) na Eq. (6) tem-se a Eq. (7):

$$\Phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{h^2 + 2hr}}{r}\right). \quad (7)$$

Por conseguinte, o comprimento de arco d' pode ser calculado como uma fração do comprimento da circunferência de 2π radianos conforme a Eq. (8):

$$d = \Phi r. \quad (8)$$

Substituindo então a Eq. (7) na Eq. (8) obtém-se a Eq. (9),

$$d' = r \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{h^2 + 2hr}}{r}\right), \quad (9)$$

na qual d' é a distância em metros sobre a superfície terrestre entre um observador – localizado a uma altura h , em metros, da superfície – e o horizonte e $r = 6.371 \times 10^3$ m é o raio da Terra.

De posse da Eq. (4) e da Eq. (9), comparações concretas podem ser efetuadas a fim de estimular a curiosidade do alunado:

Um indivíduo localizado no telhado de uma casa de 3 m de altura ($h = 3$ m) estaria a uma distância, sobre a superfície terrestre, de aproximadamente 6,18 km do horizonte ($d' \cong 6.182,72$ m). Já um indivíduo sobre um pequeno prédio de 12 m de altura ($h = 12$ m) estaria a uma distância de aproximadamente 12,37 km do horizonte ($d' \cong 12.365,4$ m). Há que se observar, junto ao alunado, que para ambos os observadores o valor de d (distância em linha reta percorrida pela luz desde o horizonte visível até os olhos do observador) não difere significativamente de d' . Isso ocorre porque na situação hipotética apresentada a altura é muito pequena quando comparada ao raio terrestre ($h \ll r$). Portanto, a distância entre observador e horizonte também é pequena quando comparada ao comprimento da circunferência terrestre idealizada ($d \ll 2\pi r$), o que implica num pequeno valor de Φ . Como para pequenos ângulos têm-se $\operatorname{arctg}(\Phi) \cong \Phi$, é válido que $d' \cong d$. Ainda se pode observar um incremento multiplicativo na distância, que é equivalente à raiz quadrada do incremento multiplicativo na altura (o observador posicionado a uma altura quatro vezes maior localiza-se a uma distância do horizonte

duas vezes maior); o que ocorre porque sendo $h \ll r$, tem-se $h^2 \ll 2hr$ na Eq. (4), o que implica em $d = \sqrt{h^2 + 2hr} \cong \sqrt{2hr}$. Ou seja: se h é multiplicado por um real positivo K , então d é multiplicado por \sqrt{K} , pois $d = \sqrt{2(Kh)r} = \sqrt{K}\sqrt{2hr}$. Esse resultado para pequenos ângulos ($d' \cong d$) evidencia o motivo pelo qual a curvatura terrestre é imperceptível para observadores posicionados a pequenas alturas em relação à superfície do planeta.

A Estação Espacial Internacional encontra-se a uma altura aproximada de 408 km ($h \cong 408.000$ m) da superfície da Terra. Dessa forma, a distância em linha reta percorrida pela luz desde o horizonte visível até os olhos dos astronautas localizados na Estação Espacial Internacional é de aproximadamente $2,316 \times 10^3$ km ($d \cong 2,316 \times 10^6$ m). Já a distância sobre a superfície terrestre é de aproximadamente $2,222 \times 10^3$ km ($d' \cong 2,222 \times 10^6$ m). A significativa diferença de aproximadamente 94×10^3 km entre os valores de d e d' evidencia o motivo de grandes alturas em relação ao solo (grandes valores de Φ) proporcionarem a percepção da curvatura terrestre – Fig. 6.

O alunado ainda pode ser questionado a respeito da altura mínima necessária, em relação ao solo, à qual deveria estar posicionado, em certa noite, para que fosse possível a visualização direta das luzes de uma cidade hipotética que se encontraria a 62 km ($d' = 62.000$ m) de distância. Desprezando-se a altura das fontes de luz da cidade hipotética, a distância percorrida pela luz emitida por essas fontes até os olhos do alunado seria aproximadamente 2 m a mais que a distância entre os locais (de observação e observado) sobre a superfície terrestre



Figura 6 - Curvatura terrestre fotografada da Estação Espacial Internacional. Fonte: [Imagens da Estação Espacial, NASA](#).

($d \cong 62.002$ m). A altura mínima necessária seria de aproximadamente 300 m (altura da Torre Eiffel).

2.2. Demonstração II – adaptação matemática para a explicação do motivo de maior temperatura ambiente quando o Sol está a pino (raios solares incidindo perpendicularmente à superfície terrestre)

A presente demonstração torna-se extremamente viável para o aprimoramento do entendimento quanto às estações do ano. Mediante a Fig. 7, que representa o movimento de translação terrestre fora de proporção, é comumente explicado aos alunos que o verão (dias mais quentes) em determinado hemisfério se dá quando os raios solares incidem a pino na região da Terra em questão. A título de exemplo, no dia 21 de dezembro ocorre o início do verão no hemisfério sul, com o sol a pino no Trópico de Capricórnio [5] – o que é evidenciado pela Fig. 8.

Inicialmente, idealiza-se, conforme a Fig. 9, um feixe de raio solar com seção transversal circular e diâmetro D , incidindo no solo com um ângulo θ .

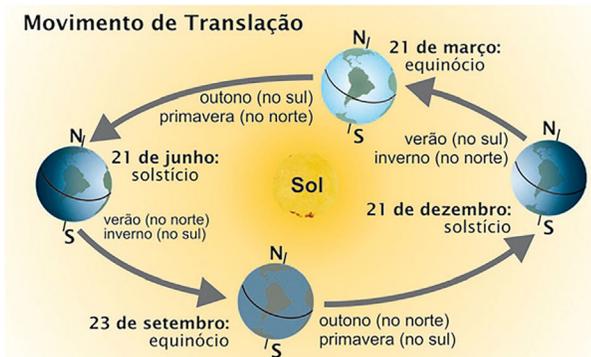


Figura 7 - Típica figura encontrada em livros didáticos para ilustrar a explicação das estações do ano. Fonte: Ref. [5].

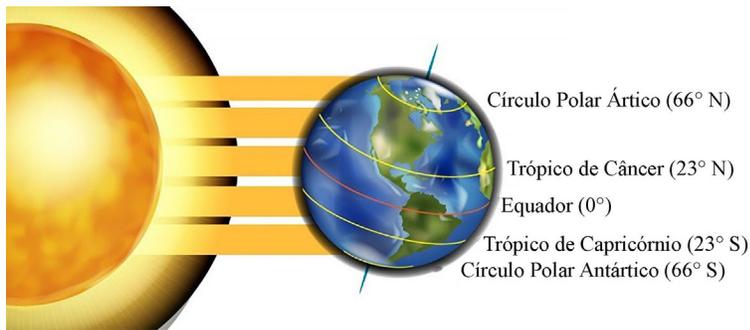


Figura 8 - Sol a pino no Trópico de Capricórnio – hemisfério sul. Fonte: Sítio da InfoEscola.

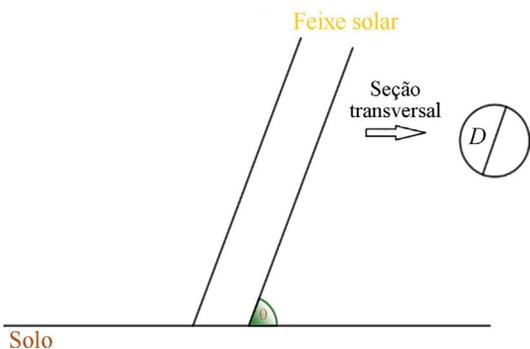


Figura 9 - Feixe solar idealizado, de seção transversal circular de diâmetro D , incidindo sobre o solo com ângulo θ .

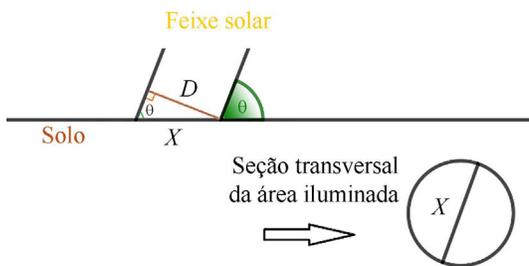


Figura 10 - Determinação geométrica do diâmetro X da área do solo iluminada pelo feixe de luz solar.

Desenhando o segmento D internamente ao feixe e o mais próximo possível do solo, obtêm-se o triângulo retângulo de hipotenusa X (Fig. 10) que representa o diâmetro da área circular do solo que é iluminada pelo feixe de luz solar.

A relação entre o diâmetro X da área iluminada e o diâmetro D do feixe solar se dá mediante a Eq. (10) e a Eq. (11), em função do ângulo de incidência θ .

$$\text{sen}(\theta) = \frac{D}{X}, \quad (10)$$

$$X = \frac{D}{\text{sen}(\theta)}. \quad (11)$$

Na sequência, pode ser apresentado ao alunado o conceito de fluxo de energia, conforme o Glossário de Física Solar da

NASA: em física, o fluxo de energia é a taxa de transferência de energia através de uma superfície e é definido como a taxa de transferência de energia por unidade de área. Considera-se, portanto, o feixe de luz solar com energia E , e o fluxo de energia F que incide sobre o solo pode ser calculado como a razão entre a energia E do feixe e a área iluminada no solo (área do círculo de diâmetro X); conforme a Eq. (12).

$$F = \frac{\text{energia}}{\text{área iluminada}} = \frac{E}{\pi(X/2)^2}. \quad (12)$$

Mediante a Eq. (12), pode-se discutir questões de proporcionalidade, verificando-se que o fluxo



Figura 11 - Combustão do papel mediante a concentração dos raios solares em um único ponto de pequena área, através de uma lupa. Fonte: Página Ciências no Século XXI.

de energia é inversamente proporcional à área iluminada. Em outras palavras, para uma mesma energia E , o fluxo F será maior para menores valores de X (menor área iluminada). Pode-se ainda fazer analogia, conforme representação da Fig. 11, à clássica situação em que se usa uma lupa ou lente de aumento para produzir fogo, ao concentrar toda a luminosidade solar recebida pela lente em único ponto de pequena área.

Dessa forma, passa-se à análise da Eq. (11), na qual é possível apresentar ao alunado outra vez o conceito de proporcionalidade: X é inversamente proporcional a $\text{sen}(\theta)$. Portanto, o menor valor de X – que, conforme a Eq. (12), irá proporcionar o maior valor de fluxo de energia F – ocorre para o maior valor possível de $\text{sen}(\theta)$. Conforme a Fig. 12 (círculo trigonométrico para o intervalo $0^\circ < \theta < 180^\circ$), o maior valor possível de $\text{sen}(\theta)$ é $1 \rightarrow \theta = 90^\circ$. Por conseguinte, fica demonstrado que quando o feixe de luz solar incide perpendicularmente ao solo (ângulo de inci-

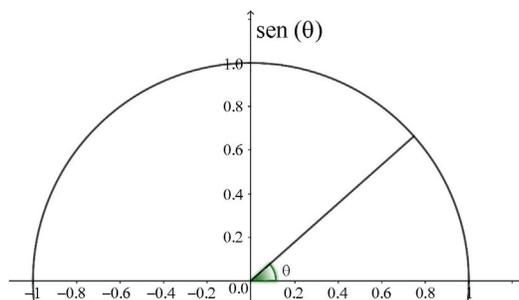


Figura 12 - Círculo trigonométrico para $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

cidência igual a 90° , conforme Fig. 13), obtém-se a maior energia por unidade de área (maior fluxo de energia) e, como consequência, temperaturas mais altas ocorrem em determinado local sobre a superfície terrestre quando há a incidência perpendicular (a pino) dos raios solares.

3. Conclusões

Na Demonstração I, há a interdisciplinaridade entre astronomia, física e matemática. São explorados conceitos de óptica (propagação da luz), curvatura terrestre, geometria plana (cálculos envolvendo circunferência e triângulo retângulo) e manipulação algébrica.

A Demonstração II igualmente implica na interdisciplinaridade entre astronomia, física e matemática; nela são explorados conceitos de energia, esta-

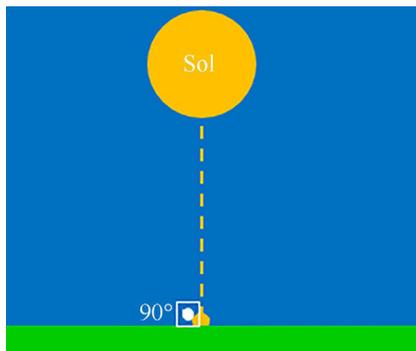


Figura 13 - Raio solar com ângulo de incidência de 90° .

ções do ano, geometria plana, trigonometria e manipulação algébrica.

Ambas as demonstrações tratam, de forma interdisciplinar, problemas comuns no ensino de astronomia mediante conceitos físicos e matemáticos.

Tratam ainda de explorar amplamente ferramentas geométricas e analíticas, a fim de que se possa estimular os alunos para a obtenção de um entendimento mais concreto sobre os enunciados apresentados, de forma a consolidar as demonstrações matemáticas como um quadro criativo de aprendizado e um fator de aprimoramento para o ensino de astronomia.

Declaração de autoria

Rodrigo José da Silva: conceituação, metodologia, demonstrações, redação (rascunho original), redação (revisão e edição). Edson Pereira Gonzaga: supervisão, redação (revisão e edição)

Recebido em: 28 de Outubro de 2020

Aceito em: 29 de Janeiro de 2021

Referências

- [1] C.J.B. Lattari, R.H. Trevisan, in: *Anais do II Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*, Valinhos, 1999.
- [2] J. S. Thiesen, *Rev. Bras. Educ.* **13**, 39 (2008).
- [3] I. Fazenda, *Dicionário em Construção: Interdisciplinaridade* (Cortez, São Paulo, 2002), 2nd ed.
- [4] E.B. Ferreira, A.B. Soares, J.C. Lima. *Psicol. Esc. Educ.* **12**, 2 (2008).
- [5] S. Nogueira, *Astronomia: Ensino Fundamental e Médio - Coleção Explorando o Ensino v. 11* (Brasília, MEC, 2009).
- [6] R.A. Martins, C. B. Silva. *Rev. Bras. Ensino Fís.* **37**, 4 (2015).

Endereços de Internet

- e-Física, https://efisica.atp.usp.br/pluginfile.php/7100/mod_resource/content/0/2-Propaga%C3%A7%C3%A3oretilineadaluz1.pdf, acesso em 7 de outubro de 2020.
- Imagens da Estação Espacial, Nasa, https://www.nasa.gov/mission_pages/station/images/index.html, acesso em 14 de dezembro de 2020.
- InfoEscola, <https://www.infoescola.com/geografia/zonas-climaticas-da-terra/>, acesso em 1 de outubro de 2020.
- Glossário de Física Solar da NASA, <https://hesperia.gsfc.nasa.gov/sftheory/glossary.htm>, acesso em 07 de outubro de 2020.
- Ciências no Século XXI, <https://cienciasnoseculoxxi.wordpress.com/tag/lupa/>, acesso em 1 de outubro de 2020.