

Resolução não-analítica
de problemas
de movimento
em um

loop

de Montanha
Russa na
presença
de atrito

Olavo Leopoldino da Silva Filho  e
Marcello Ferreira 

Instituto de Física, Universidade de
Brasília, Brasília, DF, Brasil.

RESUMO

O ensino de física, não apenas na educação básica, mas também no ensino superior, desenvolve-se a partir de exemplos e problemas que têm soluções analíticas exatas. Isso se dá, entre outras razões, porque tais situações apresentam soluções que podem ser obtidas de maneira relativamente direta, sem o uso de outras ferramentas, como computadores ou calculadoras. Entretanto, como se sabe, o conjunto de situações que fornecem soluções analíticas exatas é um subconjunto relativamente pequeno, ainda que importante, do total que representa situações físicas mais concretas. Parte desse conjunto mais amplo de situações é constituída por problemas não lineares, concebido aqui como aqueles em que as variáveis pertinentes se encontram imbricadas de tal forma que não se espera obter das equações representativas do problema uma solução analítica exata. Assim, uma abordagem com problemas não lineares tem o condão de apresentar aos estudantes a importância e o papel das soluções computacionais no contexto da física, mesmo para situações relativamente familiares. Neste artigo, apresentamos uma situação física bastante conhecida pelos estudantes - um loop em uma montanha-russa -, cuja modelagem é feita por um sistema de equações consideravelmente não linear que, para sua solução, pode ser discretizado e resolvido de maneira iterada, ou mesmo computacional.

Palavras-chave: sistemas não lineares;
soluções iteradas; soluções computacionais

1. Introdução

Ao longo do ensino de física no Ensino Médio, assim como no superior, é dada considerável relevância a problemas cuja formulação permite encontrar soluções analíticas em detrimento daqueles que demandam soluções não analíticas, iterativas ou computacionais. Estes dois últimos apresentam um contexto formal que envolve a aplicação de métodos mais elaborados, em particular os computacionais. Desse delineamento, decorre uma perspectiva pedagógica que recorre a explicações numéricas que, em variadas situações, se mostram limitadas quanto à capacidade para induzir compreensões físicas de caráter fenomenológico e, ademais, transponíveis a condições de contorno não idealizadas [1]. Um exemplo clássico e palpável disso é o do estudo do pêndulo ideal como o artefato idealizado dos fenômenos oscilatórios. Também é possível encontrar desafio análogo na descrição de um oscilador mecânico com torque restaurador não linear (não harmônico), por exemplo, derivado do acoplamento de um pêndulo gravitacional em uma polia ligada por molas e acionada por um motor [2]. Outro exemplo, menos óbvio e pouco discutido, envolve a técnica experimental de varredura-z, que busca determinar o sinal e a magnitude do índice de refração não linear suscetível à emissão de um feixe de luz (como o de um laser) que se distorce quando aplicado

a uma amostra movente que antepara, em posições focais variadas, a trajetória luminosa e sua potência ante um detector [3].

Para nos limitarmos a esses exemplos, o que ocorre é que os problemas que comportam solução analítica constituem uma parte relativamente pequena, ainda que importante, dos problemas físicos que envolvem situações mais complicadas e próximas da realidade.

De fato, a escolha por sistemas mais abstratos e simplificados permite introduzir métodos mais gerais de solução. Entretanto, a contrapartida é justamente não acessar problemas mais contextualizados e próximos de situações concretas, além de não se demandar o uso de técnicas de aproximação e suas características específicas.

Neste trabalho, apresentamos um problema familiar usualmente abordado de forma simplificada em aulas de física, mas cuja solução requer elaborações mais sofisticadas. Mostramos como esse problema pode ser modelado e, em seguida, resolvido por meio de técnicas de aproximação; estabelecemos, ainda, uma relação destas técnicas com o uso de programação computacional em física.

O problema que aqui abordamos deve ser encarado sob a luz da nova BNCC, uma vez que não se espera que seja resolvido em apenas uma aula ou parte dela, mas deve envolver uma sequência de aulas na composição de um *itinerário formativo* envolvendo a física

De fato, a escolha por sistemas mais abstratos e simplificados permite introduzir métodos mais gerais de solução. Entretanto, a contrapartida é justamente não acessar problemas mais contextualizados e próximos de situações concretas, além de não se demandar o uso de técnicas de aproximação e suas características específicas

#Autor de correspondência. E-mail: marcellof@unb.br.

e a computação como forma de aprofundar o aprendizado em ambas as áreas interdisciplinarmente.

2. Problema e modelagem

Usando o esquema ilustrativo de um *loop* de montanha-russa, exemplo recorrente em abordagens didáticas envolvendo a conservação da energia, é possível apresentar o problema desejado da maneira mostrada na Fig. 1.

A Fig. 1 esquematiza um carrinho de montanha-russa entrando em um *loop* circular, de raio $r = 5$ m, com velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s e sob uma aceleração da gravidade $g = 10$ m/s². Existe atrito entre o carro e o trilho, cujo coeficiente é de natureza dinâmica $\mu = 0,2$.

Para tratar o problema físico em questão, como de hábito, deve-se modelá-lo a fim de chegar às equações que devem ser resolvidas para obter sua solução. Esse problema apresenta, como será visto posteriormente, equações sem solução analítica. Para resolver tais equações, uma possibilidade será discretizá-las assumindo pequenos intervalos de tempo (e.g. $\tau = 0,01$ s), de modo que $t = nt$, iterando-o nas equações com valores de n partindo de 1 até o valor apropriado e considerando os valores iniciais fornecidos, para, por exemplo, encontrar o instante aproximado, em segundos, em que o carrinho atingiria a posição mais alta do *loop* (sendo que outras investigações também podem ser exploradas com a mesma metodologia).

Nesse caso, em particular, a introdução do atrito implica no aparecimento, nas equações obtidas, de termos fortemente não lineares que tornam impossível a obtenção de soluções analíticas exatas. Como se sabe, a remoção do atrito (ou a imposição de um atrito constante, em algum modelo aproximativo) permite encontrar de forma simples a solução do problema pelo uso da conservação de energia mecânica (para o caso sem atrito), ou de forma “corrigida” na energia (para o caso com atrito constante). Ocorre que, para o projeto de uma montanha-russa, por exemplo, esse processo de simplificação se mostra excessivo, pois esconde variáveis importantes envolvidas no fenômeno. É dessa simplificação exagerada que

queremos escapar [4].

Finalmente, como se mostrará, a técnica de discretização de equações permite ao professor estender o método a inúmeras situações igualmente complexas, aproximando o ensino de física à sua efetivação no mundo. O uso da programação, por sua vez, permite investigar diversas situações distintas de um mesmo problema (pela variação de seus parâmetros), obtendo deste uma visão qualitativa e fenomenológica mais ampla. Não há, pois, como compre-

endemos, uma contraposição entre a dimensão qualitativa e quantitativa, sendo que, não raro - como sustentamos neste trabalho - a última serve de apoio para a primeira.

2.1. Modelagem

No *loop*, o papel que cumpre a força da gravidade depende da posição que o carrinho ocupa. O processo de modelagem constitui importante etapa na solução de um problema físico e conta com estratégias que podem parecer óbvias ao professor experiente, mas não ao estudante. Em particular, deve-se considerar o sistema em uma configuração que permita compreender, de maneira geral, as variáveis intervenientes. Assim, para o problema que está sendo tratado, uma situação geral seria a apresentada na Fig. 2.

Um segundo momento da modelagem é aquele em que o problema é matematizado, isto é, (a) são abstraídas das figuras as variáveis relevantes e (b) são estabelecidas suas interrelações, fornecidas pela teoria de fundo, neste caso, a mecânica newtoniana aplicada a movimentos curvilíneos acelerados.

Assim, supondo a configuração apresentada na Fig. 2, temos no instante inicial $t_0 = 0$ e que $\theta_0 = 0$. Em um instante qualquer, a força peso apresenta

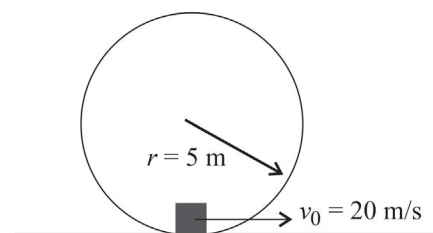


Figura 1 - Esquema ilustrativo de um *loop* de montanha-russa.

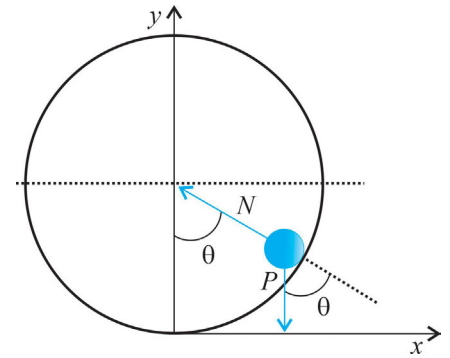


Figura 2 - Posicionamento do carrinho de montanha-russa de maneira a obter uma configuração geral do problema.

uma componente radial dada por

$$f_{g,r} = -mg\cos(\theta), \quad (1)$$

apontando *para fora* (daí o sinal negativo), e uma componente tangencial dada por

$$f_{g,t} = -mg\sin(\theta), \quad (2)$$

apontando no sentido horário (daí o sinal negativo). Durante todo o percurso, a componente tangencial estará contra o movimento circular realizado pelo carrinho, produzindo uma desaceleração. Já a componente radial apontará para fora ou para dentro da circunferência (do *loop*) dependendo do valor do ângulo θ . Para $0 < \theta < \pi/2$, o carrinho estará no primeiro quarto do círculo e a componente radial apontará para fora, enquanto para $\pi/2 < \theta < \pi$, no segundo quarto do círculo, a componente radial apontará para dentro da circunferência (mudando seu sinal), como mostrado na Fig. 3.

Como se trata de um movimento circular, há ainda uma força central a

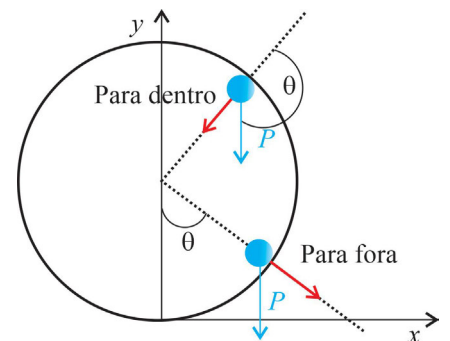


Figura 3 - Posicionamento da componente radial da força peso (em vermelho) em função do ângulo θ .

se considerar, dada por

$$f_c = -\frac{mv^2}{r}, \quad (3)$$

que aponta para fora da circunferência.

A situação física apresenta atrito, de modo que devemos calcular a normal, dada pela força de reação do trilho sobre o carrinho. Ora, a normal é a soma da força central f_c com a componente radial da força peso, ambas com o sinal trocado (o $\cos(\theta)$ garante o sinal correto para as situações possíveis). Assim,

$$N(\theta) = \frac{mv(\theta)^2}{r} + mg\cos(\theta), \quad (4)$$

em que já notamos que a força normal será dependente do ângulo θ , assim como a velocidade v , indicando que haverá não linearidade no problema. Neste ponto, valeria observar que, para ângulos no intervalo $[0, \pi/2]$, a força centrífuga e a componente radial da força peso se somam, e essa componente da força peso contribui para *aumentar* a normal; entretanto, para ângulos no intervalo $[\pi/2, \pi]$, a componente radial da força peso *diminui* o valor da normal.

Com a normal calculada, podemos apresentar a expressão da força de atrito, dada simplesmente por

$$f_{at} = \mu N = \mu m \left(\frac{v(\theta)^2}{r} + g\cos(\theta) \right), \quad (5)$$

em que notamos que a força de atrito é *tangencial* ao movimento e produzirá a sua desaceleração. A desaceleração total do movimento circular será uma composição das duas forças tangenciais, dada por

$$f_d = -\mu m \left(\frac{v(\theta)^2}{r} + g\cos(\theta) \right) - mg\sin(\theta). \quad (6)$$

Usando a segunda lei de Newton, encontramos uma aceleração tangencial dada por

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{f_d}{m} \\ &= -\mu \left(\frac{v(\theta)^2}{r} + g\cos(\theta) \right) - g\sin(\theta), \end{aligned} \quad (7)$$

fornecendo uma aceleração angular

$$\alpha(\theta) = \frac{-\mu}{r} \left(\frac{v(\theta)^2}{r} + g\cos(\theta) \right) - \frac{g}{r} \sin(\theta). \quad (8)$$

Em princípio, estaríamos prontos para escrever as equações do movimento

angular, já que temos a aceleração. Ocorre que a aceleração depende de θ , e θ depende da aceleração, em ambos os casos de maneira altamente não linear, o que não nos permite obter a equação para a variação do ângulo $\theta(t)$ explicitamente em termos do tempo. Esse é um elemento essencial de um problema não linear. Assim, devemos adotar uma *estratégia de solução* que tenha por objetivo *superar o problema*.

Essa estratégia é concretizada de maneira mais aproximada, ainda assim conveniente para ser apresentada a estudantes do Ensino Médio por um processo de *discretização*, em que passamos a considerar pequenos intervalos de tempo τ *no interior dos quais a aceleração angular pode ser considerada constante*. Evidentemente, surge aqui a questão do tamanho de τ a ser considerado. Essa é, precisamente, a riqueza que um problema não linear introduz em uma situação física usual, possibilitando discussões qualitativas importantes para a compreensão da física em geral.

Dessa forma, se considerarmos t suficientemente pequeno, então teremos a equação para a posição angular dada por (movimento circular uniformemente acelerado)

$$\theta_f = \theta_i + \frac{v(\theta_i)^2}{r} \tau -$$

$$\left(\frac{\mu}{r} \left(\frac{v(\theta_i)^2}{r} + g\cos(\theta_i) \right) - \frac{g}{r} \sin(\theta_i) \right) \frac{\tau^2}{2}, \quad (9)$$

em que θ_i é o valor da variável θ no início do intervalo τ e θ_f é o valor da variável θ no final do intervalo τ considerado. Ou seja, $\theta_f = \theta(t_{n+1})$ e $\theta_i = \theta(t_n)$, sendo que $t_k = kt$ para qualquer valor de k . Vamos, assim, escrever $\theta_f = \theta_{n+1}$ e $\theta_i = \theta_n$, bem como $v(\theta_i) = v_n$. Note que devemos escrever, também para a variável v , sua equação, já que a velocidade linear também depende da posição angular θ .

Na *aproximação utilizada*, tem-se que $v_{n+1} = v_n + \tau a_{t,n}$, isto é

$$v_{n+1} = v_n -$$

$$\left(\mu \left(\frac{v_n^2}{r} + g\cos(\theta_n) \right) - g\sin(\theta_n) \right) \tau. \quad (10)$$

O problema, bastante complexo, fica então reduzido à resolução, simultaneamente, das seguintes equações *dis-*

*cretizadas*¹

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{-\mu}{r} \left(\frac{v_n^2}{r} + g\cos(\theta_n) \right) - \frac{g}{r} \sin(\theta_n), \\ v_{n+1} &= v_n - \\ &\left(\mu \left(\frac{v_n^2}{r} + g\cos(\theta_n) \right) - g\sin(\theta_n) \right) \tau, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{v_n}{r} \tau - \\ &\left(\frac{\mu}{r} \left(\frac{v_n^2}{r} + g\cos(\theta_n) \right) - \frac{g}{r} \sin(\theta_n) \right) \frac{\tau^2}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

cujas soluções, entretanto, não são nem um pouco complicadas, sendo reduzidas apenas a cálculos algébricos bastante simples (ainda que eventualmente trabalhosos), o que terá importância mais adiante.

É importante que o estudante perceba que decomposemos a trajetória angular total em *pequenas* trajetórias na forma $[\theta_0, \theta_1] + [\theta_1, \theta_2] + \dots + [\theta_{N-1}, \theta_N]$, em que, para cada intervalo, tem-se a passagem de apenas t segundos. Essa é a *essência* do método de solução. Mais ainda, essa é uma *estratégia bastante geral*, que pode ser aplicada a outros problemas, desenvolvendo, na situação concreta em sala de aula, uma “tecnologia” para abordar outras situações consideravelmente complexas, porém eventualmente mais instigantes.

3. Solução do problema

Uma vez feita a decomposição apresentada nas Eqs. (11), podemos representar a solução a partir de uma *iteração* sobre o valor de n , iniciando-se em $n = 0$ e variando-o até um valor desejado. Neste ponto, faz-se necessário escolher um valor *pequeno* para τ . Este é outro momento rico da análise, pois trata-se de uma escolha que determinará se a aproximação usada (discretização) produz ou não resultados confiáveis. Pode-se, inicialmente, usar $\tau = 0,01$ s, mas já considerando que os estudantes poderão indagar se esse valor de τ seria realmente adequado.

Com os valores fornecidos, o sistema de Eqs. (11) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{-0,2}{5} \left(\frac{v_n^2}{5} + 10\cos(\theta_n) \right) - 2\sin(\theta_n) \\ v_{n+1} &= v_n - \alpha_{n+1} \times 5 \times 0,01 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{v_n}{5} 0,01 - \frac{\alpha_{n+1} 0,0001}{2} \end{aligned}$$

Isso pode ser representado mais organizadamente por uma tabulação de iteração, como a apresentada na [Tabela 1](#) (em que explicitamos os primeiros cálculos), lembrando que $v_0 = 20$ m/s e

Tabela 1: Cálculo dos valores da velocidade linear, da posição angular e da aceleração angular para vários valores de n .

n	v_n (m/s)	θ_n (rad/s)	a_n (rad/s ²)
0	20	0	-3,6000
1	19,82	0,03982	-3,6220
2	19,6389	0,07928	-3,6426
3	19,4568	0,11837	-3,6619
4	19,2737	0,15711	-3,6798
5	19,0897	0,19547	-3,6962
...
206	3,3402	3,1457	0,3190

$\theta_0 = 0$. Antes de construir a tabulação, entretanto, é necessário voltar ao problema original para compreender o que ele requer como solução. Devemos solicitar o instante em que o carrinho atinge o ponto mais alto da trajetória, isto é, aquele em que $\theta = \pi \cong 3,14$ rad.

Assim, inicialmente ($n = 0$),

$$v_0 = 20; \theta_0 = 0, \\ \alpha_0 = \frac{-0,2}{5} \left(\frac{400}{5} + 10 \right) = -3,6,$$

em seguida, tem-se

$$v_1 = 20 - 3,6 \times 0,01 = 19,964, \\ \theta_1 = 0 + \frac{20}{5} 0,01 - \frac{3,6 \times 0,0001}{2} = \\ 0,03982 \\ \alpha_1 = \frac{-0,2}{5} \left(\frac{19,82^2}{5} + 10 \cos(0,03982) \right) \\ - 2 \text{sen}(0,03982) = -3,588 - 0,001 = \\ -3,622,$$

e assim por diante. Consideramos esse momento de construção da tabela pela efetivação dos cálculos de enorme valor pedagógico, pois explicita inúmeros aspectos de uma física que não se reduz a situações mais mundanas.

Construindo a tabulação, temos o que está apresentado na Tabela 1. Convém ao professor solicitar que os estudantes iniciem a construção da tabela, que, evidentemente, não é algo factível para o objetivo desejado, qual seja, de se chegar ao primeiro valor de $\theta > \pi$. O professor pode, então, apresentar a Tabela 1 para conferir os resultados e, principalmente, para mostrar que somente após 205 iterações ($t = 206 \times 0,01 = 2,06$ s) é que se chegará ao resultado desejado. É nesse ponto que o problema abre espaço para considerações sobre a importância da computação na física.

4. Modelagem computacional de um problema físico

Os problemas na física são, de modo geral, complexos a ponto de não ser possível obter uma solução analítica

exata para eles. A descrição de átomos, sólidos e fluidos é, quase sempre, feita por meio do uso de cálculos computacionais. Eles têm por característica o fato de apresentarem cálculos repetitivos - com forte tendência aproximativa - que podem ser programados e executados em computadores, cuja rapidez e segurança do processamento levam a soluções adequadas e expansíveis em tempo e com precisão satisfatórios.

Uma modelagem computacional de sistemas físicos tende a ser bem-sucedida quando utiliza a sintaxe matemática como linguagem de programação, orientando-se ao objeto como fenômeno, e visa à simplicidade de sua manipulação. A ferramenta computacional, sobretudo num contexto de cibercultura, em que a cognição se qualifica por hiperconectividade e por inteligências coletivas favorecidas pela relação homem-máquina e pelas redes sociais, adquire características de automeiação da aprendizagem, de autoria e de autonomia. Essa arquitetura pressupõe, para além da facilitação da resolução de problemas, uma interface ativa, construtiva e significativa de aprendizagens, favorecendo o questionamento, a elaboração de hipóteses e a crítica de resultados em uma visão científica com referenciamento contemporâneo [5, 6].

Foi por meio dessa perspectiva que, na seção anterior, ilustramos um cálculo relativamente simples, que envolvia apenas as operações aritméticas fundamentais, mas que precisaria ser repetido inúmeras vezes para se chegar ao resultado pretendido. Esse é um problema a ser resolvido, caracteristicamente, por meio numérico (de fato, foi assim que se obteve o resultado até $n = 206$ na Tabela 1). No entanto, em face dos argumentos favorá-

veis ao uso de modelagens computacionais, buscou-se resolvê-lo a partir da construção de um sucinto aplicativo *desktop* na linguagem *c#*, como mostrado na Fig. 4.

Além da possibilidade de manipulação de recursos oriundos das tecnologias digitais da informação e da comunicação, o recurso desenvolvido permite a extrapolação de resultados, a comparação de intervalos e escalas, a diagramação e o delineamento de outras condições de contorno. É, portanto, uma ferramenta e uma estrutura decididamente favorecedoras da perspectiva de soluções não lineares de problemas físicos, como a que se buscou exemplificar com o esquema do carrinho em *loop* com atrito [7]. Serve, ademais, para que os estudantes interajam, inicialmente, de maneira qualitativa com o fenômeno, mas sendo capazes de confrontar suas hipóteses explicativas com os resultados obtidos do programa. Qual é a relação entre o atingimento do ponto mais alto com a velocidade inicial? Como caracterizar o momento em que o carrinho se desprende do trilho? Essas e inúmeras outras perguntas são possíveis de serem *investigadas* qualitativa e quantitativamente com o uso de uma ferramenta

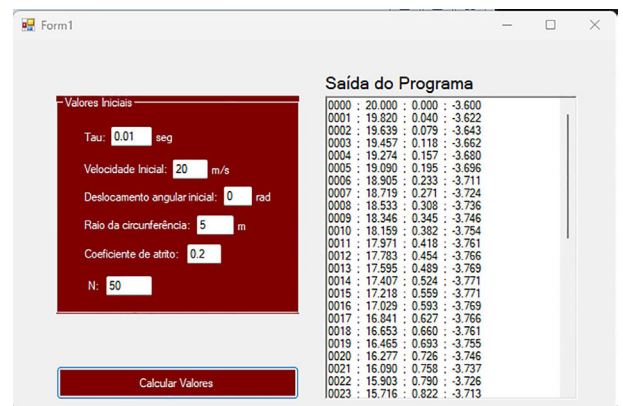


Figura 4 - Tela do programa construído para a resolução numérica do problema de um *loop* de montanha-russa.

que, sempre que possível, os próprios estudantes desenvolveram.

5. Considerações finais

O uso de um sistema físico com o qual o estudante é bastante familiarizado, mas que, quando modelado fisicamente, gera um conjunto de equações não lineares bastante difícil de ser resolvido, traz inúmeras vantagens do ponto de vista pedagógico. Em primeiro lugar, aproxima-se a física do mundo vivencial observável, considerando elementos contextuais importantes (por exemplo, no presen-

te caso, o atrito). Em segundo lugar, mostra-se, com isso, que a física, de modo geral, exige habilidades computacionais para a solução não trivial de uma cadeia de problemas recorrentes. Finalmente, tendo em mãos a solução numérica parametrizada do problema, pode-se investigar muitas das suas características. No exemplo desenvolvido, poderia-se, por exemplo, construir o gráfico da aceleração tangencial em relação ao tempo e buscar a compreensão física do comportamento apresentado; também seria possível responder se o carrinho se manteria preso ao trilho durante todo o *loop*, ou se desgarraria dele a partir de algum ângulo θ , e como

isso poderia ser caracterizado a partir das equações (por exemplo, verificando-se o momento, se houver, em que a força normal se anula) - parte importantíssima da relação entre a modelagem e a compreensão física do mundo.

Do ponto de vista da técnica de resolução, baseada na discretização do movimento, podem surgir muitas questões importantes, como: poder-se-ia averiguar a influência que a magnitude de t teria no resultado (por exemplo, escolhendo-se $\tau = 0,1$ s e refazendo a modelagem computacional); ou mesmo se o valor $\tau = 0,01$ s ado-

tado seria suficientemente pequeno para descrever corretamente o fenômeno discretizado (para $\tau = 0,001$, são necessárias $n = 2021$ iterações, fornecendo $t = 2,02$ s, um pouco menor do que $t = 2,06$ s encontrado usando-se $\tau = 0,01$ s; para $\tau = 0,0005$ s, temos $n = 4067$ iterações, fornecendo $t = 2,03$ s), introduzindo-se a noção de *convergência* de uma solução - algo incomum no aprendizado usual na física do Ensino Médio, mas natural para uma solução computacional, relevando o caráter intrinsecamente interdisciplinar da abordagem. Note-se, ainda, que a produção de gráficos e sua interpretação física são consequência natural des-

sa abordagem, correlacionando a perspectiva mais qualitativa com a interpretação de um fenômeno a partir dessa linguagem de caráter pictórico.

O programa computacional assim criado se torna *um laboratório* (de modelagem [6] e de simulação [5]) por meio do qual o estudante pode compreender em profundidade e horizontalidade o fenômeno envolvido. De fato, o problema aqui abordado pode servir como forma de introduzir a habilidade de modelar problemas físicos, bem como de programar as modelagens delineadas.

Estamos cientes de que este não é um problema para ser apresentado a qualquer estudante, nem que será factível em todos os currículos - daí termos relacionado seu tratamento com a ideia de itinerários formativos. Contudo, julgamos que ele será factível para alguns casos, em particular aqueles que contam com estudantes mais interessados pela física, estudando em escolas com alguma infraestrutura computacional básica, e que devemos, como educadores, buscar a compreensão da física em seus vários níveis, até mesmo no sentido de *induzir* o aprimoramento de seu ensino. É com essa perspectiva que oferecemos aqui este delineamento.

Recebido em: 30 de Setembro de 2022
Aceito em: 15 de Dezembro de 2022

Referências

- [1] D.X. Andrade, P.H.R. Anjos, P.E.G. Assis, Revista Brasileira de Ensino de Física **39**, e1307 (2007). [doi](#)
- [2] K. Weltner, R.F.S. Andrade, A.S.C. Esperidião, Revista Brasileira de Ensino de Física **17**, 11 (1995).
- [3] C.R. Mendonça, L. Misoguti, F.F. Dall'Agnol, S.C. Zilio, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 272 (1999).
- [4] E.A. Veit, V.D. Teodoro, Revista Brasileira de Ensino de Física **24**, 87 (2002). [doi](#)
- [5] J.R. Silva, J.S.E. Germano, R.S. Mariano, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 1508 (2011). [doi](#)
- [6] R.V. Brandão, I.S. Araújo, E.A. Veit, A Física na Escola **9**(1), 10 (2008).

Nota

¹O que fizemos aqui, para o leitor mais atento, foi discretizar as equações diferenciais associadas ao modelo *sem precisar*, entretanto, fazer menção a tais equações, o que torna o problema factível para o Ensino Médio (e consideravelmente mais enriquecedor).