Problemas Olímpicos

Soluções dos problemas do número anterior

1 Cubo de madeira de massa M em suporte horizontal perfurado na vertical de baixo para cima por um projétil de massa m não deve perder contato com o suporte. Tendo em vista que a perda de velocidade do projétil ($\Delta v = v - u$) é pequena comparada com u, podemos supor que a desaceleração seja com boa aproximação uniforme ao atravessar o bloco, e então a força exercida pelo projétil no bloco será também constante. O tempo necessário para o projétil atravessar o bloco é

$$\Delta t = d/v_{av} = 2d/(v + u).$$

O impulso vertical exercido no bloco é igual à perda de momento do projétil: $F\Delta t = m(v - u)$, ou $F = m(v - u)/\Delta t$. Como o bloco não perde o contato com o suporte, temos que esta força é igual ao peso do bloco, $Mg = m\Delta v/\Delta t$.

Resolvendo para M e substituindo Δv e Δt nas expressões acima, determinamos que a massa mínima do bloco é

$$M = m(v^2 - u^2)/(2dg) = 6 \text{ kg}.$$

2 Bloco de massa m e velocidade v em um plano encontra um "monte" de massa $3m$ e altura h em repouso. Calcular o valor de v para que a velocidade u do monte seja máxima. Se o bloquinho sobe o "monte" e depois escorrega para trás para o plano horizontal terminando com uma velocidade V, da conservação de momento linear temos

$$mv = -mV + 3mu \rightarrow V = 3u - v, \quad (1)$$

enquanto da conservação de energia antes e depois da colisão, e após a substituição de V dado pela Eq. (1)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}3mu^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}v. \quad (2)$$

Assim, para se obter a maior valor para u, necessitamos v o maior possível. O limite é atingido quando o bloquinho atinge o topo do "monte" e então desliza de volta. Seja U a velocidade do "monte" com o bloquinho momentaneamente parado em seu topo. A conservação do momento implica que

$$mv = 4mU \rightarrow U = v/4, \quad (3)$$

enquanto a conservação da energia mecânica nos dá

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}4mU^2 + mgh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8}{3}gh}. \quad (4)$$

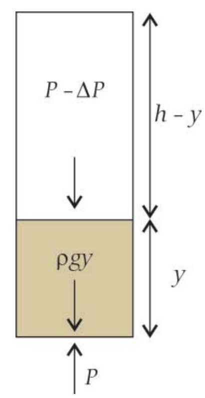
após a substituição de U dado pela Eq. (3). Este valor de v maximizará u. O "monte" terminará com uma velocidade $\sqrt{2gh/3}$, de acordo com a Eq. (2) após o bloquinho ter escorregado de volta. Curiosamente, a Eq. (1) implica que o bloquinho também terá essa mesma velocidade.

3 Cálculo do comprimento de uma coluna de mercúrio quando um tubo aberto de comprimento h é submerso pela metade em uma cuba de mercúrio e tem seu topo fechado. A pressão atmosférica corresponde a uma pressão de uma coluna de mercúrio de altura H. A pressão atmosférica é dada por

$$P = \rho g H, \quad (1)$$

sendo ρ a densidade do mercúrio (ordinariamente H é aproximadamente 76 cm). Considere o balanço de força na coluna de mercúrio (de comprimento y a ser determinado) que permanece no tubo (supondo que o mesmo tenha uma secção transversal unitária por simplicidade; desta forma pressão é igual a força) após ter sido puxado para fora do banho de mercúrio.

A pressão do ar aprisionado no espaço acima do mercúrio decresceu de $P_i = P$ antes do tubo ser puxado para $P_f = P - \Delta P$ após ser retirado, uma vez que o ar expandiu isotermicamente do volume inicial $V_i = h/2$ até o volume final $V_h = h - y$ (lembre-se que o tubo tem secção transversal unitária).



Supondo o ar como sendo um gás ideal, temos

$$P_iV_i = nRT = P_fV_f \rightarrow Ph/2 = (P - \Delta P)(h - y). \quad (2)$$

Mas o balanço de força na coluna de mercúrio como mostrado na figura é

$$P = P - \Delta P + \rho g y \rightarrow \Delta P = \rho g y. \quad (3)$$

Substituindo as Eqs. (1) e (3) na Eq. (2) e após rearranjo dos termos, obtemos

$$y^2 - (h + H)y + hH/2 = 0. \quad (4)$$

A solução desta equação deve considerar o sinal negativo na frente do discriminante uma vez que $y < h/2$. Assim

$$y = \frac{H + h - \sqrt{H^2 + h^2}}{2}. \quad (5)$$

É fácil verificar que esta solução é sempre positiva, para todo valor finito de H. Em particular os casos limites são: $y \rightarrow 0$ se $H \rightarrow 0$ (ou seja, experimento feito no vácuo) e $y \rightarrow h/2$ se $H \rightarrow \infty$ (em um meio de altíssimas pressões). Outros casos limites são: $y \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$ (*i.e.*, experimento realizado com um tubo muito curto) e $y \rightarrow h/2$ se $h \rightarrow \infty$ (tubo muito longo).