Contribuições ao ensino do Princípio de Arquimedes: aspectos físicos conceituais e de natureza histórico-filosófica

Erisvaldo R. Santos Júnior[1], Juliana M. Hidalgo[2#], Thiago de Araújo Paula[3]

[1]Instituto Federal do Piauí-Campus Corrente, Corrente, PI, Brasil.
[2]Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.
[3]Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Palavras-chave
princípio de Arquimedes
abordagem histórico-filosófica
balança hidrostática

Resumo
Este trabalho é direcionado especialmente a professores de física da educação básica e tem como objetivo trazer contribuições que possam dar subsídio a um melhor desempenho desses profissionais no ensino do princípio de Arquimedes, cooperando para superar lacunas e inadequações observadas em livros didáticos recentes. Além disso, reúne aspectos provenientes de contribuições acadêmicas sobre essa temática, bem como elementos advindos do estudo de fontes originais da história da ciência. Uma proposta de utilização de uma balança hidrostática de baixo custo foi elaborada a partir dessas considerações. É também sugerida uma demonstração para o fenômeno da tensão superficial da água no contexto das discussões. Os elementos abordados aqui contemplam aspectos físicos conceituais, bem como de natureza histórico-filosófica.

1. Considerações iniciais

A inserção didática da história e filosofia da ciência (HFC) vem sendo sugerida pela literatura da área de ensino como possibilidade de contribuir para que os estudantes alcancem visões mais coerentes e sofisticadas sobre a natureza da ciência [1-6].

A discussão de episódios históricos permite desmistificar concepções simplistas relacionadas ao modo como a ciência se desenvolve, bem como visões estereotipadas sobre os cientistas. Entre essas concepções, destaca-se o empirismo-indutivismo, o qual implica considerar que os conhecimentos científicos emergem diretamente da observação e do experimento, de modo que cientistas fazem descobertas instantâneas por meio de *insights* geniais [7].

A discussão de episódios históricos permite desmistificar concepções simplistas sobre a ciência e contribui para o ensino de conceitos científicos

Contrastando com essa concepção, sob o ponto de vista das filosofias contemporâneas, considera-se que: "Descobrir é mais do que uma mera observação, um *insight*, um palpite. A descoberta de algo é um processo complexo, que envolve o reconhecimento tanto de sua exis-

Autor de correspondência. E-mail: julianahidalgo@fisica.ufrn.br.

tência quanto de sua natureza" [6, p. 43].

Uma das possibilidades de frisar esse entendimento, fazendo frente ao empirismo-indutivismo, remete à introdução didática da HFC. Contudo, não basta inserir qualquer narrativa histórica em sala de aula. É importante que o professor reflita sobre "a qual história da ciência se deve recorrer para se atingir os objetivos educacionais" [8, p. 1].

Isso porque visões simplistas sobre a ciência são justamente reforçadas por pseudo-histórias ainda comuns no ambiente escolar [2], como a descoberta da gravidade por Newton a partir da queda de uma maçã, do empuxo por Arquimedes enquanto se banhava ou da configuração do benzeno por Kekulé em um sonho. Particularmente no caso do princípio de Arquimedes, objeto de discussão no presente trabalho, uma análise crítica minuciosa recente demonstrou que em livros didáticos de física ainda é frequente a presença da pseudo-história empirista-indutivista, a famosa "Eureka!" de Arquimedes [9].

Em livros didáticos, é recorrente a ausência de apresentações historicamente contextualizadas do princípio de Arquimedes, bem como a presença da pseudo-história envolvendo a descoberta do empuxo

Se, por um lado, não é recomendável uma inclusão acrítica das narrativas históricas romantizadas, por outro, *também* a ausência de contextualização histórica promove efeitos indesejáveis no contexto educacional. E, nesse sentido, persiste em livros didáticos de física, que constituem a principal fonte de informações para docentes e discentes, um formato padrão de apresentação do conhecimento científico:

> […] enfatizam os resultados aos quais a ciência chegou – as teorias e conceitos que aceitamos, as técnicas de análise que utilizamos – mas não costumam apresentar alguns outros aspectos da ciência. De que modo as teorias e os conceitos se desenvolvem? Como os cientistas trabalham? [1, p. 21]

Assim, os livros-texto, de modo quase que generalizado, refletem uma concepção aproblemática e ahistórica da ciência, caracterizada pela transmissão dos conhecimentos de forma já elaborada, pronta, sem contextualizar os problemas que esses conhecimentos tentaram resolver, as dificuldades encontradas etc. [10]. Por isso, pesquisas acadêmicas vêm, paradoxalmente, destacando os próprios livros-texto como "obstáculos pedagógicos que representam desafios à implementação de abordagens históricas em sala de aula" [3, p. 797].

No caso específico do princípio de Arquimedes, a pesquisa citada anteriormente identificou em livros didáticos forte incidência de uma apresentação historicamente descontextualizada [9]. Essa lacuna pode transmitir a impressão anacrônica de que o enunciado atual do princípio foi escrito por Arquimedes, contemplando componentes de entidades vetoriais e os conceitos atuais de empuxo e de fluido. Pode estimular, ainda, uma visão individualista da ciência. Afinal, trata-se do *princípio de Arquimedes*.

Ao abordarem esse conteúdo, somente dois dos doze livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático 2018 (PNLD 2018) trouxeram uma apresentação mais robusta do ponto de vista histórico-filosófico. Os demais ou simplesmente nada trazem quanto ao desenvolvimento histórico do enunciado do princípio ou trazem uma discussão embrionária, incluindo aspectos que reforçam visões distorcidas da história da ciência. Dessa forma, alusões à pseudo-história envolvendo Arquimedes e a descoberta do empuxo são notadas, ainda que nas últimas décadas trabalhos acadêmicos tenham apontado problemas históricos e físicos-conceituais dessa narrativa [9, 11, 12].

Outro aspecto importante a se destacar é que aprender ciência implica "conhecer não apenas os conteúdos científicos, mas também *seus pressupostos e limites de validade*" [2, p. 125; ênfase nossa]. Contudo, observou-se que nenhum dos exemplares didáticos analisados do PNLD 2018 trouxe um limite de validade para o princípio de Arquimedes [9], muito embora existam trabalhos acadêmicos que discutem a necessidade de incorporar esse aspecto ao ensino desse conteúdo. Essa discussão costuma ser desconhecida pelos professores, para quem o princípio de Arquimedes é sempre verdadeiro e independente de um limite de validade [13-15].

O presente trabalho se desenrola a partir do contexto explicitado nas considerações anteriores. Por um lado, são recorrentes as inadequações nas apresentações do princípio de Arquimedes em livros didáticos. Por outro, e em contraste, existem contribuições acadêmicas que apontam aspectos relevantes relacionados à abordagem do princípio de Arquimedes. Adicionalmente, pode colaborar para uma abordagem mais adequada do princípio, o fato de que existe uma versão traduzida e comentada da obra *Sobre os corpos flutuantes*, de Arquimedes [16], bem como do ensaio *A pequena balança*, de Galileu Galilei [17].

Diante desse panorama, sintetizamos aspectos relevantes oriundos de contribuições acadêmicas sobre o ensino do princípio de Arquimedes, bem como elementos oriundos da análise das referidas fontes originais da história da ciência. Elaboramos uma proposta de utilização de uma balança hidrostática de baixo custo com base nessas considerações. Sugerimos também uma demonstração para o fenômeno da tensão superficial da água no contexto das discussões. Contemplamos aspectos que podem colaborar para uma melhor performance dos professores em sala de aula na abordagem desse conteúdo, superando inadequações e lacunas observadas em livros didáticos.

2. Problematizando a pseudo-história da "Eureka!" de Arquimedes

É amplamente conhecido por professores e alunos o episódio da "Eureka!" de Arquimedes. A famosa narrativa da descoberta do empuxo remonta a uma curta passagem da obra *De Architectura*, do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio, que viveu no século I a.C., dois séculos após Arquimedes, de modo que os dois não eram contemporâneos. O rei Hieron II de Siracusa teria fornecido certa quantidade de ouro a um artesão para a confecção de uma coroa, mas

> […] houve uma acusação de que o ouro havia sido furtado e um peso equivalente de prata havia sido adicionado na fabricação da coroa. Hieron, achando um ultraje ter sido enganado, e ainda não sabendo como detectar o roubo, pediu a Arquimedes que considerasse o assunto. [18, p. 238]

Não há registros sobre esse episódio nos trabalhos remanescentes de Arquimedes, e Vitruvius não indicou a origem dessas informações [11]. A solução teria decorrido de um *insight* genial de Arquimedes:

> […] foi para o banho, e ao entrar em uma banheira observou que quanto mais seu corpo afundava nela, mais água transbordava. Como isso indicava o caminho para explicar o caso em questão, sem um momento de hesitação e eufórico de alegria, ele pulou da banheira e correu nu para casa, gritando em voz alta que havia encontrado o que procurava. [18, p. 238]

Seria então possível descobrir se a coroa havia sido fraudada, comparando o volume de água que transbordava de um recipiente:

> […] diz-se que fez duas massas do mesmo peso da coroa, uma de ouro e outra de prata. Depois de fazê-las, ele encheu um grande recipiente com água até a borda e colocou a massa de prata nele. Transbordou um volume de água igual ao da prata afundada no vaso. […] após esse experimento, ele também inseriu a massa de ouro no recipiente cheio e, ao retirá-la, medindo como antes, descobriu que não houve tanta água perdida, mas sim uma quantidade menor. […] Finalmente, enchendo novamente o recipiente e colocando a própria coroa na mesma quantidade de água, ele descobriu que mais água transbordava para a coroa do que para a massa de ouro do mesmo peso. [18, p. 239]

Do ponto de vista histórico, além de não existirem fontes da própria época de Arquimedes que relatem o episódio, outra questão pode ser pontuada: se um escravizado preparou o banho (o que é uma hipótese coerente com o contexto grego), por que teria enchido a banheira até o limite, uma vez que ele próprio teria de limpar o local? [11].

A narrativa vitruviana sobre como o problema foi solucionado é, ainda hoje, amplamente divulgada em livros didáticos e mídias digitais. É bem difundida entre professores de física da educação básica e se baseia na medida dos pesos dos volumes de água deslocados. Trata-se de um típico exemplo de pseudo-história [19]: há monumentalidade, isto é, um único indivíduo realiza a descoberta por meio de um *insight* repentino; transmite um significado que justifica a autoridade da ciência (Arquimedes resolve a situação); a solução para um problema surge inesperadamente quando o interessado em resolvê-lo está realizando outra tarefa sem relação com o problema em questão (Arquimedes estava tomando banho); utiliza técnicas literárias para tornar a história mais atraente, dando ênfase ao apelo emocional, favorecendo a memorização e a divulgação da narrativa mítica (o rei estava furioso; Arquimedes sai nu gritando pelas ruas).

A Fig. 1 mostra um exemplo de ilustração em livro didático que remonta à narrativa vitruviana.

O texto didático não identifica de onde provém a figura. Trata-se da representação realizada por Peter Flotner (1490-1546) em uma tradução germânica da obra de Vitruvius, publicada em Nuremberg em 1548. A apresentação da figura no livro didático reforça a pitoresca narrativa pseudo-histórica largamente conhecida.

Essa versão vitruviana do episódio histórico foi questionada por Galileu Galileu, no século XVII:

> Os que leem com cuidado os autores antigos estão familiarizados com o fato de Arquimedes ter descoberto o furto do ourives na coroa de ouro de Hieron. No entanto, creio que até agora não se sabe como procedeu aquele homem ilustre para chegar a essa descoberta. [17, p. 105]

Galileu escreveu que poderia ter havido a construção de uma narrativa distorcida a partir de informações fragmentadas sobre o feito de Arquimedes:

> Acreditaria sim que, difundindo-se a notícia de que Arquimedes havia descoberto o furto por meio da água, algum autor contemporâneo terá deixado algum relato do fato; e que o mesmo, ao acrescentar qualquer coisa ao pouco que havia entendido pelos rumores espalhados, disse que Arquimedes havia utilizado a

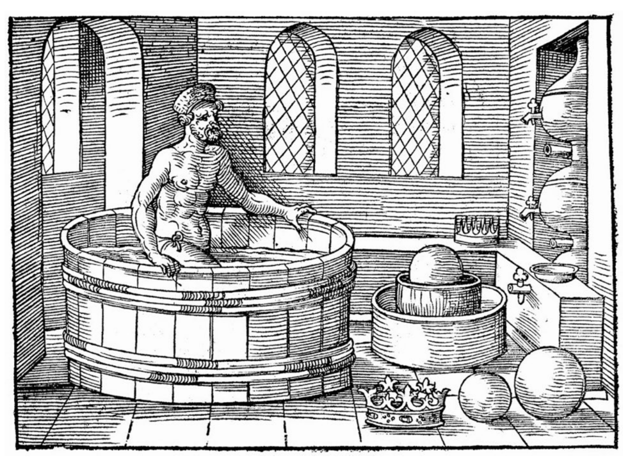


Figura 1 - Imagem observada em livro didático. Retirada da Ref. [20].

água do modo que passou a ser o universalmente aceito. [17, p. 105]

Admirador profundo de Arquimedes, Galileu não considerava que ele havia procedido daquela maneira, pois "esse método era de todo falho, faltando-lhe a precisão requerida nas coisas matemáticas" [17, p. 105].

Podemos dimensionar essa imprecisão, realizando uma previsão para a subida do nível do líquido [11]. Consideramos que uma coroa de 1 kg de massa, com densidade de 15 g/cm^3 (valor intermediário entre a densidade do ouro e da prata) e diâmetro de 20 cm, é inserida em um recipiente cilíndrico de 10 cm de raio (R), parcialmente ocupado por água (Fig. 2). O volume desse objeto será dado por:

$$V = \frac{m}{d} = \frac{1000\ \text{g}}{15\ \text{g/cm}^3} = 66,7\ \text{cm}^3.$$

A partir disso, é possível determinar a variação do nível de água (Δh) quando esse objeto é completamente imerso no líquido.

$$\Delta V = \pi \times R^2 \times \Delta h,$$

$$66,7 = \pi \times R^2 \times \Delta h,$$

$$\Delta h = \frac{66,7}{\pi \times R^2} = \frac{66,7}{3,14 \times 100} = 0,21\ \text{cm} = 2,1\ \text{mm}.$$

Uma elevação de pouco mais de 2 mm seria praticamente imperceptível! E isso para uma situação em que supostamente a variação do nível da água seria a maior possível – recipiente com raio praticamente igual ao raio da coroa. Assim, Arquimedes teria também dificuldade ao tentar identificar o volume de água deslocado pela imersão de um corpo de mesma massa (da coroa) de ouro puro. Os cálculos apresentados anteriormente envolvem matemática básica. Podem ser facilmente realizados em aula, colaborando para a problematização da visão pseudo-histórica do episódio.

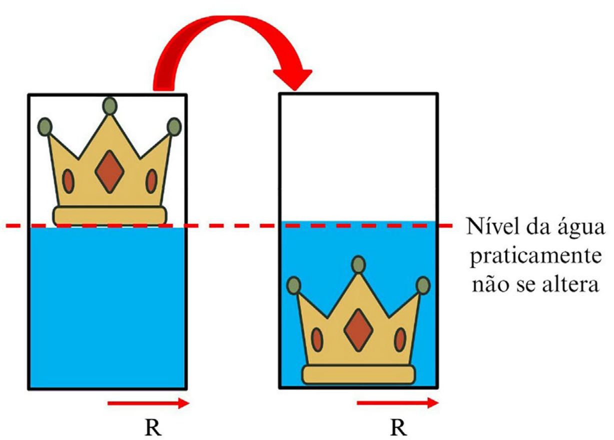


Figura 2 - Representação da imersão da coroa em recipiente com água.

Outro aspecto importante deve ser notado. A descrição de Vitruvius cita o extravasamento da água. Arquimedes teria observado o volume extravasado em três situações distintas de submersão dos seguintes corpos em um recipiente completamente cheio de água: coroa, objeto de igual massa de ouro puro e objeto de igual massa de prata pura. Nesses casos, contudo, a tensão superficial da água constituiria um empecilho significativo à validade do método. Devido a esse fenômeno físico, é possível submergir objetos de modo que o líquido ultrapasse consideravelmente o nível do recipiente, e mesmo assim não transborde.

A imprecisão física desse método pode ser investigada por meio de uma atividade demonstrativa interessante, facilmente reprodutível em aula, que permite discutir o conceito de tensão superficial: inserir pequenos objetos em um copo cheio de água sem que o líquido transborde. Produzimos um vídeo (Fig. 3) que demonstra a possibilidade de inserir em um copo completamente cheio de água duas moedas de 50 centavos, 8 moedas de 25 centavos e 6 moedas de 10 centavos antes que o líquido começasse a transbordar.

Uma elevação do nível da água de 2,1 mm (conforme calculado anteriormente) poderia não proporcionar extravasamento algum. Outra possibilidade seria que o volume extravasado diferisse do volume submerso da coroa e, portanto, não colaborasse na decisão sobre haver ou não fraude.

Logo, a narrativa vitruviana é questionável do ponto de vista físico e histórico [11]. Galileu, ao criticá-la, sugeriu uma alternativa plausível, baseada nos seus estudos sobre as obras de Arquimedes. Como veremos na próxima seção, o recurso mostrado por Galileu é muito interessante e pode ser discutido em sala de aula.

Figura 3 - Experimento para discutir a tensão superficial da água. Disponível em: https://youtu.be/9LZE8hIv4M8.

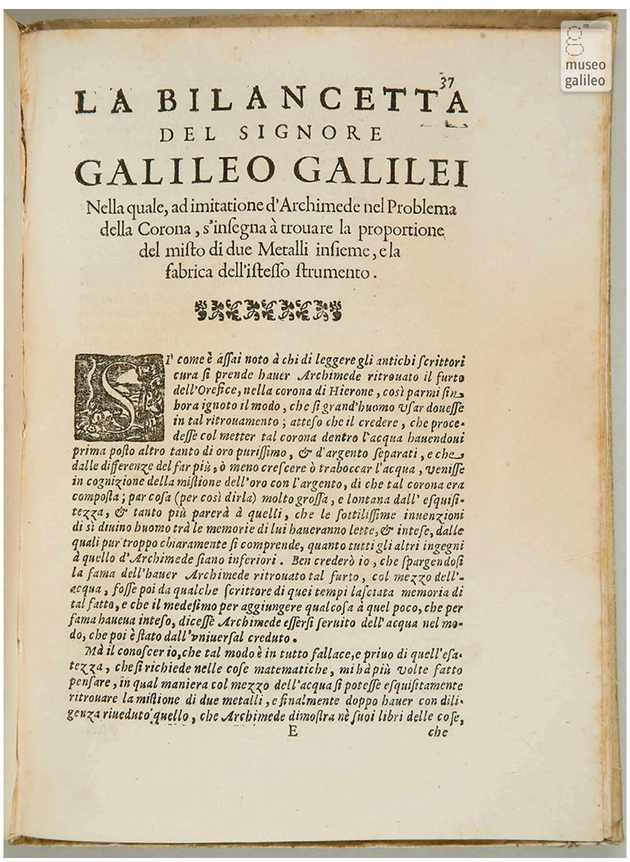
3. A balança hidrostática como alternativa

As inconsistências físicas da versão vitruviana motivaram o jovem Galileu Galilei, então com 22 anos e estudante em Florença, a investigar qual método Arquimedes poderia ter utilizado. Galileu estudou detalhadamente os escritos do pensador grego em busca de respostas. Discutiu a questão com outros pesquisadores, escrevendo à mão um pequeno ensaio, seu primeiro trabalho em italiano – futuramente intitulado e publicado (após a sua morte) como *La bilancetta* (Fig. 4). O ensaio teria sofrido acréscimos do próprio Galileu a partir dessas interações com acadêmicos leitores do manuscrito [21].

O método de Arquimedes para resolver o impasse acerca da suspeita de fraude da coroa envolveria o uso de uma balança hidrostática

O trabalho apresenta uma metodologia plausível à época de Arquimedes e historicamente coerente. Há uma versão traduzida desse ensaio para o português sob o título de *La bilancetta* ou *A pequena balança* [17], antecedida por introdução do físico Pierre Lucie, intitulada "Galileo e a tradição arquimediana" [22].

Segundo Galileu, o método de Arquimedes não envolveria medidas de volume, mas sim a comparação, por meio de uma balança hidrostática, das variações de peso aparente de materiais distintos, de mesma massa, quando inseridos em água.


37

LA BILANCETTA
DEL SIGNORE
GALILEO GALILEI
Nella quale, ad imitatione d'Archimede nel Problema della Corona, s'insegna à trouare la proportione del misto di due Metalli insieme, e la fabrica dell'istesso strumento.

SI' come è assai noto à chi di leggere gli antichi scrittori cura si prende hauer Archimede ritrouato il furto dell'Orefice, nella corona di Hierone, così parmi sin hora ignoto il modo, che sì grand'huomo usar douesse in tal ritrouamento; atteso che il credere, che procedesse col metter tal corona dentro l'acqua hauendoui prima posto altro tanto di oro purissimo, & d'argento separati, e che dalle differenze del far più, ò meno crescere ò traboccar l'acqua, venisse in cognizione della mistione dell'oro con l'argento, di che tal corona era composta; par cosa (per così dirla) molto grossa, e lontana dall'esquisitezza, & tanto più parerà à quelli, che le sottilissime inuenzioni di sì diuino huomo trà le memorie di lui haueranno lette, & intese, dalle quali pur troppo chiaramente si comprende, quanto tutti gli altri ingegni à quello d'Archimede siano inferiori. Ben crederò io, che spargendosi la fama dell'hauer Archimede ritrouato tal furto, col mezzo dell'acqua, fosse poi da qualche scrittore di quei tempi lasciata memoria di tal fatto, e che il medesimo per aggiungere qualcosa à quel poco, che per fama haueua inteso, dicesse Archimede essersi seruito dell'acqua nel modo, che poi è stato dall'vniuersal creduto.

Mà il conoscer io, che tal modo è in tutto fallace, e priuo di quell'esatezza, che si richiede nelle cose matematiche, mi hà più volte fatto pensare, in qual maniera col mezzo dell'acqua si potesse esquisitamente ritrouare la mistione di due metalli, e finalmente doppo hauer con diligenza riueduto quello, che Archimede dimostra nè suoi libri delle cose,

E che

Figura 4 - Folha de rosto do ensaio *La bilancetta*, de Galileu. Fonte: https://exhibits.museogalileo.it.

Em uma balança de braços iguais, poderiam ser colocados pesos e contrapesos (tara), conforme mostra a Fig. 5. Na situação evidenciada, inicialmente, os dois corpos estão em equilíbrio porque possuem o mesmo peso e estão equidistantes do centro "c" da balança. Em seguida, quando o metal é submerso em água, ocorre o desequilíbrio.

Galileu comentou justamente esse tipo de situação de perturbação do equilíbrio quando o metal era inserido em água:

> Suspendamos então um metal em uma excelente balança e, no outro braço, um contrapeso de mesmo peso no ar que o metal. Se agora mergulharmos o metal na água, deixando o contrapeso no ar, teremos de aproximar este último do fulcro, a fim de que continue equilibrando o metal. [17, p. 106]

À luz de uma terminologia moderna, podemos dizer que o peso aparente do objeto na água equivale ao seu peso no ar menos a força de empuxo que atua verticalmente para cima. Para reestabelecer o equilíbrio, é necessário aproximar o contrapeso do centro (c), de modo que o torque resultante no sistema se anule novamente.

Como esse método se aplica ao problema da coroa do rei?

Inicialmente, suspende-se uma massa de ouro no ponto "b" igual à massa do contrapeso "d", conforme mostra a Fig. 6, e observa-se o equilíbrio da balança. Posteriormente, insere-se a massa de ouro em água, percebendo uma diminuição do seu peso aparente e uma perturbação do equilíbrio do sistema. Galileu descreve que é possível fazer com que o equilíbrio seja reestabelecido. Nesse caso, aproxima-se o contrapeso "d" do centro "c", levando o corpo de ouro para o ponto "e", por exemplo.

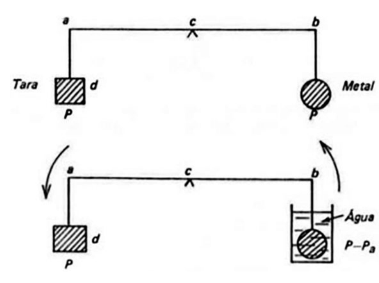


Figura 5 - Representações da balança hidrostática. Retiradas da Ref. [22].

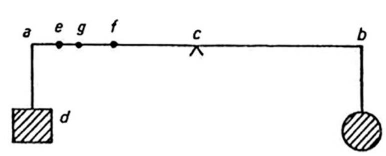


Figura 6 - Possíveis deslocamentos do contrapeso na balança. Retirado da Ref. [17].

Caso o mesmo procedimento seja realizado com um corpo de mesma massa de prata, a diminuição do peso aparente, quando o corpo é inserido em água, será ainda maior, já que a prata ocupa um volume maior. Diante do desequilíbrio, como descreve Galileu, é necessário deslocar o contrapeso. Na figura, é necessário deslocá-lo para um ponto ainda mais próximo de "c", como "f", por exemplo.

Por fim, inserindo na água um objeto de mesma massa, mas composto de uma liga de ouro e prata, notamos que o ponto de equilíbrio seria entre os pontos "e" e "f", algo tal como "g". Dessa forma, quanto mais próximo "g" ficar de "e", maior será a porcentagem de ouro no objeto e, quanto mais próximo o "g" ficar de "f", maior será a porcentagem de prata. Em síntese, como indica Galileu:

> Suponhamos, por exemplo, que a liga de ouro e prata esteja em "b", equilibrada no ar [pelo contrapeso] "d", e que, ao mergulhar a liga na água, esse contrapeso seja deslocado até "g". Afirmo que [os pesos de] ouro e prata que compõem a liga estão entre si na mesma razão que as distâncias [respectivas] "fg" e "ge" [17, p. 107].

Em notação moderna, temos:

$$\frac{M_{ouro}}{M_{prata}} = \frac{fg}{ge}.$$

Desse modo, caso o processo fosse realizado com a coroa do rei e com pesos e contrapesos de massas equivalentes à da coroa, seria possível determinar a proporção entre as quantidades de prata e de ouro presentes no objeto. O ourives só seria inocentado caso fosse notado equilíbrio entre a coroa e o objeto de massa equivalente de ouro puro.

Galileu indicou que acreditava ser "esse mesmo o método que usou Arquimedes, ao observar que, além de ser extremamente preciso, apoia-se em demonstrações descobertas pelo próprio Arquimedes [sobre o funcionamento das alavancas]" [17, p. 105].

Muito posteriormente à discussão realizada por Galileu, foram encontradas evidências históricas que corroboram essa versão. Transmitida à Idade Média, a balança hidrostática remontaria, de fato, à tradição clássica como método para analisar ligas de ouro e prata. Em um pequeno poema latino sobre pesos e medidas, datado dos séculos IV ou V d. C., "o emprego da balança hidrostática para resolver o problema da coroa é amplamente descrito e atribuído a Arquimedes" [23].

O funcionamento da balança hidrostática pode ser discutido em sala de aula com a utilização de uma montagem simples, de baixo custo

Finalizando esta seção, é importante chamarmos atenção para o fato de que, embora seja acessível e muito interessante, inclusive sob o ponto de vista pedagógico (é fácil reproduzir uma balança hidrostática para discussão!), a versão apresentada por Galileu ainda é pouco discutida em livros didáticos, salvo raras exceções [9] e, como consequência, quase não há difusão entre professores da educação básica. A seguir, apresentamos a proposta de uma balança hidrostática portátil, elaborada com materiais de fácil acesso. Sugerimos procedimentos que podem fomentar discussões em sala de aula.

4. Uma proposta de balança hidrostática

Uma balança hidrostática pode ser reproduzida a partir de recursos de baixo custo, encontrados em supermercados e papelarias. Para a versão mostrada a seguir, foram utilizados os seguintes materiais: três conjuntos com massas iguais a 265 g (o primeiro contendo 35 bolinhas de gude, o segundo contendo grãos de feijão e o terceiro contendo tanto feijões quanto algumas bolinhas de gude), um escalímetro de 30 cm de comprimento, um rolo de barbante, uma vasilha transparente parcialmente cheia de água, uma mamadeira contendo cerca de 240 mL de água (com massa total igual a 265 g), uma redinha utilizada para armazenar laranjas, fita adesiva e uma balança comum.

Fizemos a montagem da balança de acordo com o procedimento descrito a seguir. Inicialmente, o escalímetro foi preso a um anteparo superior com barbante a partir do seu ponto médio, a marcação de 15 cm, de modo que permanecesse em equilíbrio. Depois, a mamadeira, que funcionaria como contrapeso, foi presa na posição em que o escalímetro indicava 25 cm. O conjunto de bolinhas de gude, por sua vez, foi preso na posição 5 cm, de modo que ambos os objetos ficassem equidistantes do eixo de rotação e em equilíbrio. Esta é a Etapa 1, mostrada na Fig. 7.

Como um primeiro procedimento experimental, inserimos o conjunto de bolinhas de gude na vasilha com água e percebemos que o equilíbrio do sistema foi perturbado. O escalímetro girou no sentido horário, já que o empuxo atuante sobre as bolinhas fez com que o peso aparente delas diminuísse, tornando-se menor que o peso da mamadeira (nessa etapa, é importante prender os barbantes ao escalímetro com fita adesiva a fim de evitar deslizamentos). Temos, então, a Etapa 2, na Fig. 7.

Para restabelecermos o equilíbrio, aproximamos a mamadeira do eixo de rotação, diminuindo o braço de força do seu peso em relação a esse ponto e, consequentemente, reduzindo o torque gerado por essa força. O escalímetro somente retornou à disposição horizontal quando o contrapeso, isto é, a mamadeira, se encontrava na posição 20,7 cm, aproximadamente (Etapa 3, Fig. 7).

Repetimos esse procedimento para o conjunto de grãos de feijão e para o conjunto composto de feijões e bolinhas de gude. As etapas 4 a 6 na Fig. 7 correspondem ao uso do conjunto que continha somente grãos de feijão (265 g, que correspondiam à mamadeira com 240 mL de água). O contrapeso precisou ser trazido para a posição 16,5 cm para que o equilíbrio fosse reestabelecido após a imersão do conjunto em água. Nas etapas 7 a 9, por sua vez, temos o procedimento com o conjunto que continha tanto feijões quanto bolinhas de gude (também 265 g, que equivaliam à mamadeira com 240 mL de água). Nesse caso, o contrapeso precisou ser trazido para a posição 19,2 cm. Isso era esperado, já que uma certa massa de grãos de feijão ocupa um volume maior que a mesma massa de bolinhas de gude, produzindo um empuxo de módulo maior na primeira situação. Desse modo, é necessário um amplo deslocamento do contrapeso para compensar a variação do peso aparente do objeto.

É possível, ainda, determinar a relação entre a massa de feijões e de bolinhas de gude no último conjunto. Para isso, utilizaremos uma equação baseada no raciocínio exposto por Galileu para o ouro e a prata presentes na coroa adulterada. Considerando $X_{conjunto}$ como a posição de equilíbrio do contrapeso para cada tipo de conjunto imerso em água, temos:

$$\frac{M_{bolinhas\ de\ gude}}{M_{feijões}} = \frac{X_{feijões+bolinhas\ de\ gude} - X_{feijões}}{X_{bolinhas\ de\ gude} - X_{feijões+bolinhas\ de\ gude}},$$

$$\frac{M_{bolinhas\ de\ gude}}{M_{feijões}} = \frac{19,2 - 16,5}{20,7 - 19,2} = 1,8,$$

$$M_{bolinhas\ de\ gude} = 1,8.M_{feijões}.$$

Sabendo que a massa de cada conjunto era de 265 g, torna-se possível determinar a massa, em gramas, dos feijões e das bolinhas de gude presentes no último caso.

$$M_{bolinhas\ de\ gude} + M_{feijões} = 265,$$

$$1,8.M_{feijões} + M_{feijões} = 265,$$

$$2,8.\ M_{feijões} = 265,$$

$$M_{feijões} = \frac{265}{2,8} \cong 94,64\ \text{g},$$

$$M_{bolinhas\ de\ gude} = 265 - 94,64 \cong 170,\ 36\ \text{g}.$$

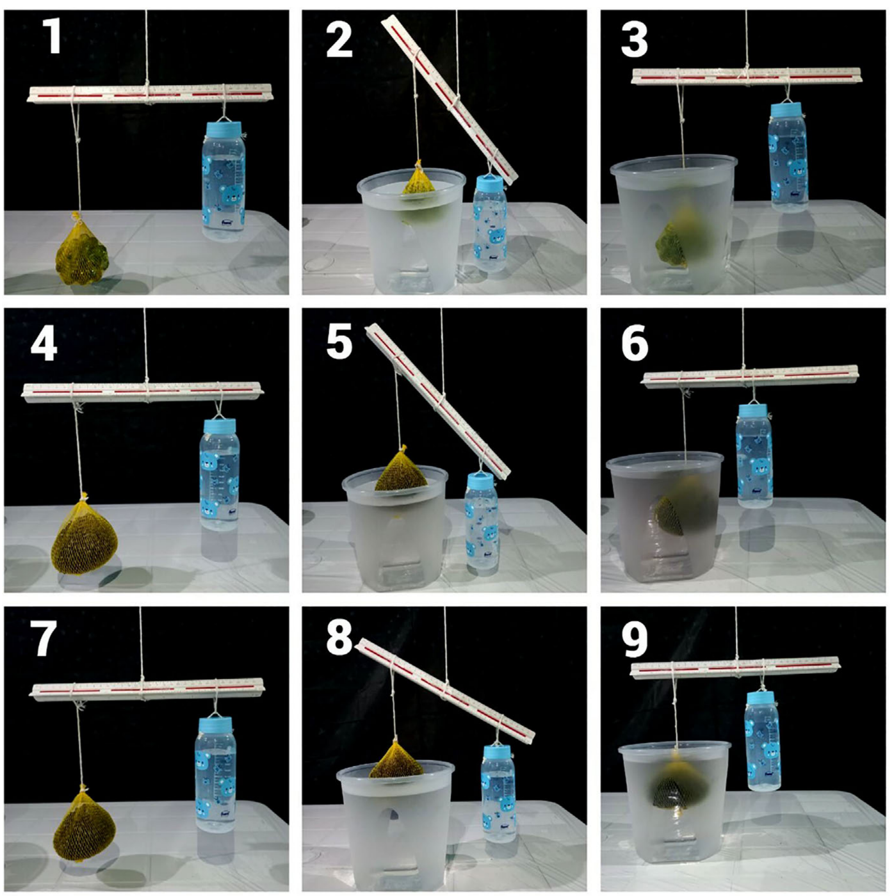


Figura 7 - Etapas de utilização da balança hidrostática.

Dessa forma, a massa de bolinhas de gude no último conjunto é maior que a de feijões. Isso é esperado, já que a posição de equilíbrio na situação final está mais próxima da posição de equilíbrio da mamadeira quando utilizamos somente bolinhas de gude do que quando utilizamos somente feijões.

Os procedimentos e as considerações mostrados nessa seção indicam que a balança hidrostática pode ser levada à sala de aula da educação básica. Trata-se de um recurso interessante para colaborar para o ensino do princípio de Arquimedes, remontando, inclusive, à discussão histórica realizada por Galileu.

5. Há um limite de validade para o princípio de Arquimedes?

Um enunciado usual para o princípio de Arquimedes costuma ser: “todo corpo mergulhado em um líquido sofre um empuxo de baixo para cima igual ao peso do fluido por ele deslocado”.

Sugerimos que os professores de física reflitam sobre os seguintes questionamentos: Há um limite de validade para esse princípio? O que acontece se um objeto é colocado em um fluido com peso menor que o peso do próprio objeto? É possível chegar a uma situação de equilíbrio?

A Fig. 8 mostra uma latinha flutuando em um recipiente no qual não existe o volume de líquido requerido pelo enunciado tradicional do princípio de Arquimedes. Percebe-se que a latinha chega ao equilíbrio mesmo sem haver fluido suficiente (do ponto de vista do enunciado do princípio), já que o peso do fluido no recipiente é menor que o peso do objeto nele inserido. Esse tipo de situação constitui o chamado Paradoxo Hidrostático de Galileu [14].

A resolução do Paradoxo Hidrostático apresentada a seguir provém do artigo dos físicos Fernando Lang da Silveira e Alexandre Medeiros sobre essa temática [14]. O esquema apresentado na Fig. 9 mostra a conversão do problema em uma balança hidrostática. O vaso cilíndrico em que será colocado o objeto tem área transversal S_1 e o vaso em que o líquido é livre para alterar seu nível tem área transversal ΔS.

Na situação ilustrada, as pressões nos pontos A e B são iguais, já que ambos estão em um mesmo nível. Dessa forma, considerando $\rho_{líquido}$ como a densidade do líquido, ρ_{objeto} como a densidade do objeto, P_{atm} como a pressão atmosférica local e g como a aceleração gravitacional, teremos:

$$P_A = P_{atm} + P_{objeto} = P_{atm} + m_{objeto} \cdot \frac{g}{S_1},$$

$$P_A = P_{atm} + \frac{\rho_{objeto}.S_1.H_1.g}{S_1} = P_{atm} + \rho_{objeto}.H_1.g,$$

Figura 8 - Demonstração do Paradoxo Hidrostático de Galileu.

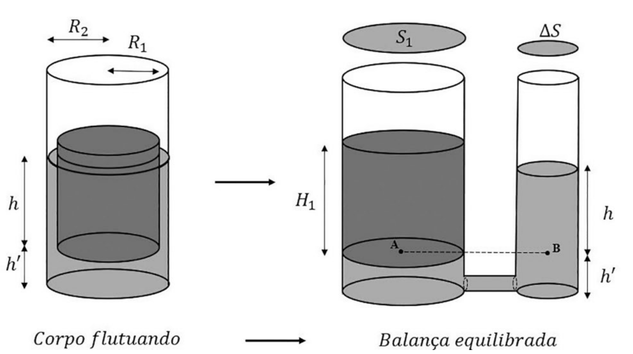


Figura 9 - Balança hidrostática equilibrada para solução do paradoxo de Galileu. Baseada na Ref. [14, p. 280].

$$P_B = P_{atm} + P_{hidrostática} = P_{atm} + \rho_{líquido}.g.h.$$

Igualando as expressões obtidas para as pressões nos pontos A e B, podemos deduzir uma relação entre o ρ_{objeto} e o $\rho_{líquido}$ para que ocorra flutuação.

$$P_A = P_B,$$

$$P_{atm} + \rho_{objeto}.H_1.g = P_{atm} + \rho_{líquido}.g.h,$$

$$\rho_{objeto}.H_1 = \rho_{líquido}.h,$$

$$\rho_{objeto} = \rho_{líquido} \cdot \frac{h}{H_1}.$$

Para a condição de flutuação, $H_1 \geq h$. Logo, $\rho_{objeto} \leq \rho_{líquido}$. Isso é uma consequência conhecida do enunciado tradicional do princípio de Arquimedes. Um objeto só alcança a flutuação caso sua densidade seja menor ou igual à do fluido.

É possível determinar a relação entre o volume deslocado pelo objeto (V_{desl}) e o volume previsto no princípio de Arquimedes (V_{Arq})?

Evidenciaremos que o volume do princípio só equivale ao volume deslocado pelo objeto em situações nas quais o nível do líquido praticamente não se altera. Para isso, consideraremos o esquema presente na Fig. 10.

Na situação mostrada à esquerda, quando a balança ainda está desequilibrada, o volume do líquido é dado pela seguinte expressão:

$$V_{líquido} = H_2.(S_1 + \Delta S).$$

Já na situação da balança equilibrada, o volume do líquido será expresso pela equação abaixo:

$$V_{líquido} = H_2.(S_1 + \Delta S),$$

$$V_{líquido} = S_1.h' + \Delta S.(h + h').$$

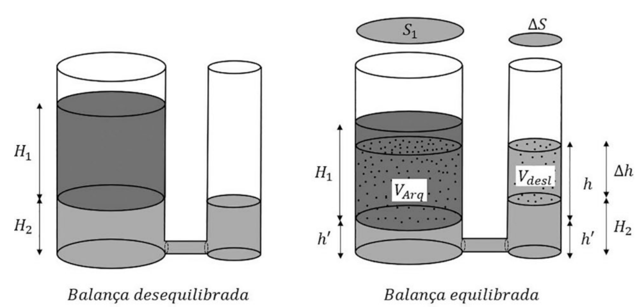


Figura 10 - O volume V_{desl} do líquido deslocado é menor do que o volume V_{Arq} do corpo abaixo do nível da superfície de separação do líquido com a atmosfera. Baseada na Ref. [14].

Como o volume do líquido antes e após o equilíbrio não sofreu alteração, podemos igualar as duas expressões.

$$H_2.(S_1+\Delta S)=S_1.h'+\Delta S.\left(h+h'\right),$$

$$H_2.(S_1+\Delta S)=S_1.h'+h'.\Delta S+h.\Delta S,$$

$$h'.(S_1+\Delta S)=H_2.(S_1+\Delta S)-h.\Delta S,$$

$$h'=H_2-h.\frac{\Delta S}{S_1+\Delta S}.$$

Agora, para obtermos o volume deslocado pelo objeto, faremos:

$$V_{desl}=\Delta S.\Delta h=\Delta S.\left(h+h'-H_2\right),$$

$$V_{desl}=\Delta S.\left(h+H_2-h.\frac{\Delta S}{S_1+\Delta S}-H_2\right),$$

$$V_{desl}=\Delta S.\left(h-h.\frac{\Delta S}{S_1+\Delta S}\right),$$

$$V_{desl}=\Delta S.h-\Delta S^2.\frac{h}{S_1+\Delta S},$$

$$V_{desl}=\frac{\Delta S.h.S_1+\Delta S^2.h-\Delta S^2.h}{S_1+\Delta S},$$

$$V_{desl}=(S_1.h).\frac{\Delta S}{S_1+\Delta S}.$$

Porém, o produto $S_1.h$ corresponde ao volume previsto pelo enunciado tradicional do princípio de Arquimedes, que é o volume submerso do objeto. Dessa forma, a equação se resume a:

$$V_{desl}=V_{arq}.\frac{\Delta S}{S_1+\Delta S}.$$

Portanto, o volume deslocado pelo objeto só será igual ao volume do princípio de Arquimedes nas situações em que $\Delta S \gg S_1$. Assim, chega-se à conclusão de que existe um limite de validade para o princípio:

> [...] está correto apenas se as dimensões do recipiente que contém o líquido forem muito maiores que as dimensões do corpo ali colocado. Se essa condição estiver satisfeita, o nível do líquido no recipiente permanecerá inalterado quando o corpo for colocado a flutuar; o volume deslocado de líquido será igual ao volume submerso do corpo no líquido. [14, p. 283]

Além da influência da tensão superficial da água na medição dos volumes transbordados, o volume deslocado de um líquido, quando um objeto é inserido em seu interior, pode divergir do volume submerso do corpo a depender das dimensões do objeto e do recipiente. Ambos os aspectos têm impacto sobre a validade do método descrito por Vitruvius.

Como mencionamos na introdução desse trabalho, consideramos que aprender conteúdos científicos implica também conhecer seus pressupostos e limites de validade. Contudo, a discussão apontada por Silveira e Medeiros em 2009 [14], ou ainda muito anteriormente, em um artigo no *American Journal of Physics* na década de 1940, "seria possível um barquinho de 150 g flutuar em 100 g de água?" [13], ainda não chegou ao contexto educacional brasileiro e costuma ser desconhecida pelos professores [15]. Entre os livros aprovados no PNLD 2018, nenhum traz qualquer limite de validade para o princípio na versão do aluno. Desses, um único livro didático traz na versão do professor somente um *link* para o artigo de Silveira e Medeiros com a indicação de que há possibilidade de uma nova formulação do princípio para que se escape do Paradoxo Hidrostático de Galileu [24, p. 277]. No entanto, observa-se que o livro didático não explica ao professor o que seria o Paradoxo Hidrostático, de modo que não o sensibiliza para a pertinência dessa discussão [9].

6. Considerações finais

No tratado *Sobre os corpos flutuantes*, mais especificamente em um conjunto de três proposições, Arquimedes apresenta o que futuramente seria o chamado "princípio de Arquimedes":

> Proposição 5 – Qualquer sólido mais leve do que um fluido ficará, caso colocado no fluido, submerso de tal forma que o peso do sólido será igual ao peso do fluido deslocado. [...] Proposição 6 – Se um sólido mais leve do que um fluido for forçadamente submerso nele, o sólido será impelido para cima com uma força igual à diferença entre seu peso e o peso do fluido deslocado. Proposição 7 – Um sólido mais pesado do que um fluido descerá, se colocado nele, ao fundo do fluido, e o sólido será, quando pesado no fluido, mais leve do que seu peso real pelo peso do fluido deslocado. [16, p. 74-75]

Diferentemente do enunciado hodierno do princípio, a expressão "fluido", utilizada nessa tradução, remete especificamente a líquidos, uma vez que Arquimedes não considerou para gases a validade daquelas proposições. Nesse texto original, não há uma abordagem que se refira à força de empuxo, muito menos a uma eventual formulação matemática. As demonstrações se baseiam na geometria euclidiana, evidenciando a forte influência de Euclides no trabalho de Arquimedes. Evidências experimentais não estão presentes quando Arquimedes discute suas proposições. Pode-se afirmar que sua argumentação não é de natureza empírica.

Dessa forma, o que se costuma ensinar como Princípio de Arquimedes é resultado de um desenvolvimento histórico, sendo inadequado afirmar que Arquimedes é responsável pelo enunciado, pela matematização e pelas demonstrações atuais. Esse aspecto deve ser frisado em sala de aula de modo a atender à Base Nacional Comum Curricular no que tange a apresentar "a ciência como um empreendimento humano, construído histórica e socialmente" [25, p. 152]. Adicionalmente, também é pertinente considerar que o princípio de Arquimedes tem um limite de validade, como apontam as considerações sobre o Paradoxo Hidrostático. Galileu, séculos atrás, apontou que "a flutuação pode muito bem ser possível em quantidades de água menores do que a dos volumes submergidos" [26, p. 203].

Ainda considerando subsídios que podem contribuir para um melhor desempenho no ensino do princípio de Arquimedes, é interessante que o professor da educação básica reflita sobre os aspectos físicos conceituais, bem como de natureza histórico-filosófica apontados no presente artigo, de modo a evitar a disseminação da pseudo-história sobre o episódio da "Eureka!" de Arquimedes. Caso o educador perceba a presença dessa narrativa histórica distorcida no livro didático que adota, pode, inclusive, tomá-la como motivação para a introdução de discussões interessantes e viáveis para o contexto educacional relativas ao fenômeno físico da tensão superficial da água e ao mecanismo da balança hidrostática. Nesse sentido, propusemos neste trabalho recursos específicos e de fácil utilização pelo professor.

Recebido em: 11 de Outubro de 2022
Aceito em: 8 de Novembro de 2022

Referências

[1] R.A. Martins, in *Estudos de História e Filosofia das Ciências*, editado por C.C. Silva (Livraria da Física, São Paulo, 2006).
[2] T.C.M. Forato, R.A. Martins, M. Pietrocola, in *Temas de História e Filosofia da Ciência no Ensino*, editado por L.O.Q. Peduzzi, A.F.P. Martins, J.M.H. Ferreira (EDUFRN, Natal, 2012).
[3] C. Moura, A. Guerra, Revista Tecné, Episteme y Didaxis **número extraordinário**, 797 (2016).
[4] D. Ortega, B.A. Moura, Revista Brasileira de Ensino de Física **42**, e20190114-1 (2020). doi
[5] P.C.C. Mendonça, Ciência & Educação **26**, e20003 (2020). doi
[6] L.O. Peduzzi, A.C. Raicik, Investigações em Ensino de Ciências **25**, 19 (2020). doi
[7] A.F. Chalmers, *O Que é a Ciência, afinal?* (Brasiliense, São Paulo, 1993).
[8] J.O. Baldinato, P.A. Porto, in *Anais do VI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*, Belo Horizonte, 2008 (ABRAPEC, Belo Horizonte, 2008).
[9] J.M. Hidalgo, D.M. Queiroz, M.C.J. Oliveira, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **38**, 1251 (2021). doi
[10] D.G. Pérez, I.F. Montoro, J.C. Alis, A. Cachapuz, J. Praia, Ciência & Educação **7**, 125 (2001).
[11] R.A. Martins, Caderno Catarinense de Ensino de Física **17**, 115 (2000).
[12] C.R. Pagliarini, C.C. Silva, in *Anais do Encontro de Pesquisa em Ensino de Física*, São Carlos, 2006 (SBF, São Carlos, 2006).
[13] G.M. Koehl, American Journal of Physics **17**, 579 (1949).
[14] F.L. Silveira, A. Medeiros, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **26**, 273 (2009). doi
[15] G.P.S. Silva, N.T.C. Silva, M.P. Matias, F.N. Monteiro Júnior, in *Anais eletrônicos do VII Congresso Nacional de Educação*, Maceió, 2020 (CONEDU, Maceió, 2020).
[16] A.K.T. Assis, Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência **16**, 69 (1996).
[17] G. Galilei, Cadernos de História e Filosofia da Ciência **9**, 105 (1986).
[18] M.P. Vitruvius, in *A Source Book in Greek Science*, editado por Morris R. Cohen, I.E. Drabkin (Havard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1958).
[19] D. Allchin, Science Education **87**, 329 (2003). doi
[20] A.M.R. Luz, B.A. Álvares, C.C. Guimarães, *Física: Contexto & Aplicações* (Scipione, São Paulo, 2017).
[21] A. Mottana, Philosophia Scientiæ **21**, 165 (2017). doi
[22] P. Lucie, Cadernos de História e Filosofia da Ciência **9**, 95 (1986).
[23] M. Berthelot, Annales de Chimie et de Physique **6**, 475 (1891).
[24] K. Yamamoto, L.F. Fuke, *Física Para o Ensino Médio* (Saraiva, São Paulo, 2016)
[25] Brasil/MEC, *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio* (MEC/Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2018).
[26] P. Palmieri, Archive for History of Exact Sciences **59**, 189 (2005). doi