

# O princípio da equivalência: Uma introdução à relatividade geral

R.R. Machado<sup>1,2</sup>, A.C. Tort<sup>2,3</sup> e  
C.A.D. Zarro<sup>3,#</sup>

<sup>1</sup>Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>2</sup>Programa de Pós Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>3</sup>Mestrado Profissional em Ensino de Física, Instituto de Física Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

## RESUMO

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) representa o ápice da física clássica. Embora a teoria necessite do domínio de ferramentas matemáticas sofisticadas para compreendê-la plenamente e obter resultados, as principais ideias podem ser facilmente apreendidas de forma qualitativa: o espaço-tempo é quadridimensional e sua geometria é determinada pela distribuição de massa e energia. Esta declaração geralmente é explicada por meio de ilustrações que contêm analogias. Existe, no entanto, uma abordagem que permite ao leitor interessado, professores de física e alunos interessados, a apreender a TRG de uma forma mais profunda e quantitativa, através da aplicação do Princípio da Equivalência. Este é o objetivo deste artigo.

**Palavras-chave:** relatividade geral; gravitação relativística; princípio da equivalência

## 1. Em busca de uma teoria da relatividade geral

É consenso que a teoria da relatividade geral (TRG), proposta por Albert Einstein (Fig. 1), é o ápice da física clássica. Observações que vão desde os três testes clássicos - o avanço do periélio de Mercúrio, o desvio da luz em um campo gravitacional e o efeito Doppler gravitacional - até os mais recentes, como a detecção de ondas gravitacionais, a primeira imagem de um buraco negro (Fig. 1) e a confirmação do tamanho e posição da sua “sombra” reforçam a opinião geral da comunidade científica: a TRG é a teoria dos campos gravitacionais, quaisquer que sejam suas intensidades.

Mas como tudo começou? Podemos traçar as origens da teoria da relatividade geral ao *status* privilegiado dos referenciais inerciais, isto é, aqueles para os quais valem a primeira lei do movimento e as incompatibilidades entre a gravitação newtoniana e a teoria da relatividade restrita (TRR); mais precisamente, ao problema da interação instantânea embutida na lei da gravitação

universal e da simultaneidade. A distância entre dois corpos, a distância própria, deve ser medida em um intervalo de tempo  $\Delta t$  nulo; no entanto, se uma mudança de referencial for efetuada, a simultaneidade da medida da distância desaparece. Einstein, em seu livro de divulgação da teoria da relatividade [1], registra claramente seu descontentamento com o *status* privilegiado que os sistemas de referência inerciais possuem na mecânica newtoniana e na relatividade restrita. Sempre que vamos descrever o movimento de um objeto escolhemos um corpo rígido, como um vagão que se move sobre o leito de uma ferrovia, ao qual fixamos um eixo de coordenadas e observadores munidos de régua e relógios que realizam as medidas necessárias. Einstein argumenta que se quisermos descrever o movimento de um corpo (realizando medidas com régua e relógios), é indiferente se o referencial adotado para tal descrição é inercial no sentido newtoniano ou não. Entretanto, se quisermos determinar as leis da física (relações entre as grandezas físicas medidas) em um determinado referencial,

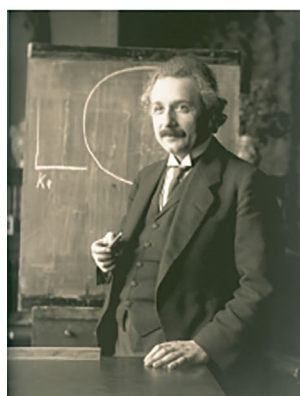


Figura 1 - Albert Einstein em 1921. À direita, a primeira imagem do buraco negro em M87. (Fonte das imagens: Wikipédia)

#Autor de correspondência. E-mail: carlos.zarro@if.ufrj.br.

elas assumem suas formas mais simples se escolhermos os referenciais inerciais. As transformações de referencial, as transformações de Galileu no caso newtoniano e as transformações de Lorentz no caso da relatividade restrita asseguram a simplicidade das leis físicas. Referenciais não-inerciais tornam as leis físicas mais complexas, pois geram forças como a força centrífuga ou a força de Coriolis, que violam a terceira lei do movimento e modificam a dinâmica, tornando-a mais complexa. No entanto, para Einstein, a condição especial dos referenciais inerciais newtonianos era injustificável e ele demonstra claramente sua insatisfação [1]:

*Como é possível que determinados corpos de referência (ou bem seus estados de movimento) sejam privilegiados frente a outros (ou frente a seus estados de movimento respectivos)? Qual é a razão desse privilégio?*

Einstein sai então em busca de um modo de estender seu princípio da relatividade restrita, com o objetivo de incorporar os referenciais não-inerciais e tendo como pedra fundamental o princípio da relatividade geral [1]:

*As leis da natureza são válidas para todos os referenciais, quaisquer que sejam seus estados de movimento.*

Einstein percebe também que a implementação de sua abordagem às leis naturais está intimamente ligada ao problema da gravitação. Como veremos a seguir, o programa de pesquisa de Einstein leva-o a eliminar a gravitação como interação e a substituí-la por uma teoria geométrica, a TRG.

Nossa porta de entrada à mais bela das teorias clássicas será o princípio da equivalência (PE), que, na opinião dos presentes autores, é o modo mais simples e pedagógico de introduzir o leitor à TRG e seus fascinantes desdobramentos.

## 2. O princípio da equivalência na forma fraca

Na mecânica clássica, reconhecemos pelo menos dois tipos de massa: a massa inercial  $m_{inercial}$ , que é interpretada como uma resistência à mudança de estado de movimento, isto é: resistência à aceleração, e a massa gravitacional  $m_{grav}$ , que é interpretada como a fonte do campo gravitacional, ou carga gravitacional, em analogia com a carga elétrica. A primeira aparece na segunda lei de movimento de Newton,

$$\mathbf{F} = m_{inercial}\mathbf{a}, \quad (1)$$

e a segunda na lei da gravitação de Newton,

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GM_{grav}m_{grav}}{r^2}. \quad (2)$$

Quanto à massa gravitacional, há uma distinção entre a massa gravitacional ativa, digamos  $M_{grav}$  na Eq. (2), e a massa gravitacional passiva,  $m_{grav}$ . No entanto, pode ser mostrado que essa distinção é irrelevante, afinal poderíamos inverter os respectivos papéis. Uma demonstração formal desse resultado é dada na Ref. [2] e doravante usaremos o termo massa gravitacional ao nos referirmos aos dois tipos de massa. Todavia, é espantoso e intrigante que a massa inercial e a massa gravitacional sejam diretamente proporcionais! Escolhendo a constante de proporcionalidade como igual à unidade, escrevemos

$$m_{inercial} = m_{grav}. \quad (3)$$

Esse fato inexplicável no arcabouço da física newtoniana é confirmado por experimentos, inclusive os realizados por Galileu e pelo próprio Newton, que mediram os períodos de pêndulos feitos de diferentes materiais. Posteriormente, numerosos experimentos foram realizados e talvez o mais famoso deles seja o conduzido pelo Barão Lóránd von Eötvös. A Tabela 1 ilustra uma amostra desse tipo de experimento, feitos no passado e mais recentemente [3]. Uma

discussão detalhada sobre a verificação experimental do PE pode ser encontrada na Ref. [4].

A igualdade entre as massas inercial e gravitacional expressa o princípio da equivalência na forma fraca (PEF), que pode ser reformulado de um modo didaticamente mais proveitoso da seguinte maneira:

*Em um pequeno laboratório em queda livre, não-girante, sem janelas, uma partícula livre inicialmente em repouso permanece em repouso.*

Nesse enunciado do PEF, partícula livre significa uma partícula que não esteja submetida a nenhum tipo de interação, exceto - do ponto de vista de um observador newtoniano externo - a interação gravitacional. A condição *não-girante* significa que queremos eliminar os efeitos das forças inerciais como, por exemplo, a força centrífuga. A exigência de que o laboratório não tenha janelas impede que o experimentador possa olhar para fora em busca de pistas que dizem respeito ao seu estado de movimento. Por fim, o laboratório deve ser suficientemente pequeno em tamanho para que o campo gravitacional possa ser considerado uniforme em seu interior, o que impõe a condição adicional de que medidas físicas sejam tomadas em intervalos de tempo também pequenos. Naturalmente, podemos trocar a condição inicial de repouso por um movimento retilíneo uniforme (MRU), mas será didaticamente mais simples se impusermos a condição inicial de velocidade zero. Um laboratório em queda livre que preencha os requisitos acima define um referencial inercial no sentido einsteiniano.

Segue que no referencial inercial einsteiniano, uma partícula livre, independentemente de sua massa e composição interna, não tem peso! A força gravitacional desaparece! Sabemos da existência de um efeito similar na mecânica newtoniana. Ele surge quando trata-

Tabela 1: Alguns dos experimentos que mostram a igualdade das massas gravitacional e inercial. Até o momento da publicação deste artigo, o experimento STEP (Satellite Test of the Equivalence Principle) ainda não tinha sido realizado.

Experimentador	Ano	Método	$\frac{m_{inercial} - m_{grav}}{m_{inercial}}$
Galileu	1610	pêndulo	$2 \times 10^{-3}$
Newton	1680	pêndulo	$1 \times 10^{-3}$
Eötvös	1890	Balança de torsão	$5 \times 10^{-8}$
Eötvös e cols.	1908	Balança de torsão	$3 \times 10^{-9}$
Dick e cols.	1964	Balança de torsão	$3 \times 10^{-11}$
Braginsky e cols.	1971	Balança de torsão	$3 \times 10^{-11}$
STEP	2021	Queda livre	$1 \times 10^{-18}$

mos com forças inerciais ou pseudoforças, como por exemplo as forças centrífugas ou as forças de Coriolis. Essas forças não obedecem à terceira lei de Newton - ação e reação - e não são causadas por fontes, como por exemplo as forças eletromagnéticas ou as forças da gravitação newtoniana. E mais ainda, essas pseudoforças são proporcionais à massa inercial da partícula sobre a qual atuam. Vejamos um exemplo simples.

Consideremos uma partícula de massa  $m$  que descreve um círculo de raio  $r$  sobre uma mesa presa a um fio de massa desprezível e tensão constante  $T$ . Do ponto de vista do observador não-inercial (sentido newtoniano), solidário com a partícula, a equação de movimento se escreve

$$T - F_{centrifuga} = T - m_{inercial} \frac{v^2}{r} = 0, \quad (4)$$

onde  $v$  é a magnitude da velocidade tangencial da partícula. Se passarmos para um referencial inercial, a equação de movimento será

$$T = F_{centripeta} = m_{inercial} \frac{v^2}{r}. \quad (5)$$

Não nos deixemos enganar pela aparente simplicidade da manipulação algébrica; não se trata de uma mudança trivial de sinal ou de uma redefinição de etiquetas! A primeira equação descreve uma situação de equilíbrio estático, enquanto a segunda, um estado dinâmico que nos permite afirmar que a partícula está em um estado de movimento circular uniforme. Com a substituição do referencial não-inercial por um inercial (sentido newtoniano!), eliminamos a pseudoforça e ficamos com a força real que atua sobre a partícula.

Segue que se substituirmos o conceito de referencial inercial de Newton pelo conceito de referencial inercial de Einstein, o peso de um corpo passa a ser uma força fictícia e, como tal, eliminável pela escolha apropriada do referencial!

Eis o comentário de Einstein sobre essa situação citada na Ref. [5]:

*Então ocorreu-me a ideia mais feliz da minha vida - der glücklichste Gedanke meines Lebens - na seguinte forma: o campo gravitacional tem apenas uma existência relativa, de modo similar ao campo elétrico gerado pela indução eletromagnética, pois para um observador que cai em queda livre do telhado de uma casa, pelo me-*

*nos na sua vizinhança imediata, não há campo gravitacional. De fato, se o observador soltar alguns corpos, então estes, em relação a ele, permanecerão em repouso ou em movimento uniforme, independentemente da sua natureza particular ou física (nessa observação, a resistência do ar, naturalmente, é ignorada). Portanto, o observador tem o direito de interpretar seu estado como "de repouso".*

Lembrando que as forças inerciais são sempre proporcionais à massa inercial, segue que podemos argumentar de modo plausível que a massa gravitacional é na verdade a massa inercial e livrar-nos da primeira, adotando somente essa última. O ilustre físico britânico Sir Arthur Eddington (1882-1944), em seu livro clássico *Space, Time & Gravitation* [6], é muito claro a respeito do conceito das forças gravitacionais como forças fictícias:

*Se a possibilidade de anular um campo de forças pela escolha de um referencial adequado é um teste de irrealidade, então a gravitação é tão irreal como a força centrífuga.*

De agora em diante, somente a massa inercial de uma partícula tem significado físico.

### 2.1. Um exemplo: Alice e o túnel através do centro da Terra

No clássico da literatura infantil *Alice no País das Maravilhas* [7], a pequena Alice, correndo atrás do Coelho Branco, cai em queda livre dentro de um poço escuro que a leva ao País das Maravilhas. Mas suponhamos que o poço possa ser imaginado como um túnel que conecta dois pontos antípodas,  $A$  e  $B$ , logo passa pelo centro da Terra (Fig. 2). Imaginemos também que a Terra possa ser modelada por uma esfera sólida de densidade uniforme  $\rho$  e raio  $R$ . Na proposição 70 dos *Principia*, Newton demonstra que no interior de uma casca esférica, o campo gravitacional é nulo [8]. Desse resultado segue que no modelo que adotamos para a Terra, o campo gravitacional no seu interior é dado por

$$g(r) = - \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (6)$$

onde

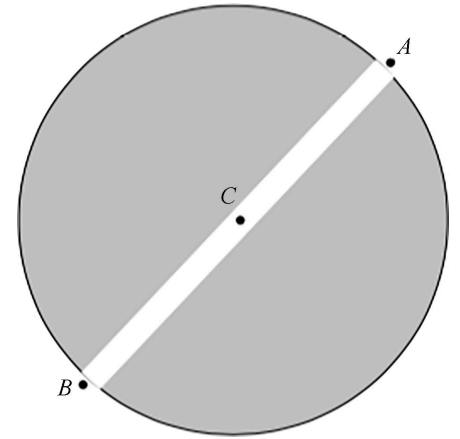


Figura 2 - Um túnel através do centro da Terra. O ponto  $C$  é o centro da Terra,  $A$  e  $B$  são pontos diametralmente opostos, isto é: antípodas.

$$M(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (7)$$

com  $r \in [0, R]$ , é a massa encerrada pela casca. De acordo com a proposição 70, essa espessura  $R - r$  não contribui para o campo gravitacional no seu interior (ver Fig. 3). Das Eqs. (6) e (7), segue que o campo gravitacional  $g$  no interior da Terra pode ser escrito na forma:

$$g(r) = - \frac{4\pi G \rho r}{3} = - \frac{GM}{R^3} r, \quad (8)$$

onde  $M = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$  é a massa da Terra.

Agora nos perguntamos: o que acontece com Alice quando, ao cair nesse túnel, passar pelo centro da Terra - onde o campo gravitacional inverte o seu sentido - e atingir o ponto diametralmente oposto? Como descreveremos o estado instantâneo de movimento de Alice? Do ponto de vista do observador

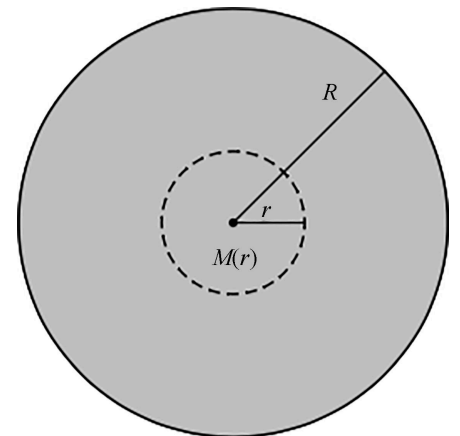


Figura 3 - A contribuição ao campo gravitacional devido à casca esférica de espessura  $R - r$  é nula na região  $[0, r]$ .



newtoniano, a força que atua sobre Alice é dada por

$$F = mg(r) = -\frac{GMm}{R^3}r, \quad (9)$$

onde  $m$  é a massa de Alice. Introduzindo o eixo  $OX$  com origem no centro da Terra, temos

$$F = -\frac{GMm}{R^3}x, \quad x \in [-R, +R]. \quad (10)$$

Como a força gravitacional é linear em  $x$  e tem um sinal algébrico negativo, a força sobre Alice é da forma  $F = -\kappa x$ , isto é, tem a forma da lei de Hooke; logo, do ponto de vista do observador newtoniano, Alice descreverá um movimento harmônico simples (MHS),

$$x(t) = R \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \quad (11)$$

e velocidade variável

$$v(t) = -\frac{2\pi R}{T} \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right). \quad (12)$$

E do ponto de vista de um observador inercial einsteiniano, isto é: da própria Alice? A resposta é simples: absolutamente nada! Qual a razão? Por quê? Porque Alice, ela mesma, é um referencial inercial einsteiniano, ou melhor, uma sucessão de referenciais inerciais instantaneamente em queda livre e comóveis com ela. Alice oscilará entre os pontos antípodas, embora não em MHS, pois está inteiramente livre de forças e, ao passar pelo centro da Terra, prosseguirá por inércia.

## 2.2. Os limites do princípio da equivalência: Alice é esmagada

A rigor, o princípio da equivalência deixa de ser válido se o corpo de prova não for puntiforme. Um corpo extenso está sujeito às forças de maré, sinal inequívoco da presença da gravidade, ou, como veremos mais adiante, da curvatura do espaço-tempo. Se levarmos em conta que Alice (Fig. 4) é um corpo extenso, ela estará submetida a uma força de maré dada por [9]:

$$\begin{aligned} f_{\text{mare}} &= -\frac{GMm}{R^3}[r + \Delta r - (r - \Delta r)] \\ &= -2GMm\frac{\Delta r}{R^3} \end{aligned} \quad (13)$$

onde  $\Delta r = r - r_{cm}$  é a variação da distância radial entre um ponto sobre o eixo central do corpo de Alice em relação ao centro da Terra e  $r_{cm}$ , a posição do centro de massa de Alice também em relação ao centro da Terra. Portanto,  $\Delta r$  é a variação da distância radial em relação

ao centro de massa de Alice. Se  $r > r_{cm}$ , a força de maré apontará para o centro da Terra, mas, se  $r < r_{cm}$ , ela apontará no sentido oposto, isto é, radialmente para fora. Em consequência, vemos que Alice será esmagada, e não espaguetificada, como no onipresente exemplo do astronauta que cai em um buraco negro. É claro que podemos argumentar que o efeito é ridiculamente pequeno, pois  $\Delta r$  é da ordem da altura de Alice; não obstante, do ponto de vista puramente conceitual e pedagógico, ele ilustra os limites de validade do princípio da equivalência. A presença das forças de maré indica que se o laboratório em queda livre não for de dimensões pequenas e as medidas realizadas em intervalos de tempo curtos, o princípio da equivalência deixa de ser válido. Em outras palavras, as forças de maré são as impressões digitais da presença de campos gravitacionais.

## 3. O princípio da equivalência na forma forte e a curvatura do espaço-tempo

Se a gravitação é uma força fictícia, como substituí-la? A resposta é sucinta, mas só aparentemente simples: pela geometria! Mais precisamente, por uma geometria do espaço-tempo não-euclidiana que é determinada pelo modo como a matéria e a energia estão distribuídas no espaço-tempo. A análise do efeito Doppler em um campo gravitacional nos dá uma pista.

Começemos estendendo o princípio da equivalência à relatividade restrita e aos fenômenos eletromagnéticos:

*Para um observador em queda livre, valem todas as leis da física e estas devem ser compatíveis com a relatividade restrita.*

Essa forma do princípio da equivalência que incorpora a TRR e as demais leis da física, em particular a teoria eletromagnética clássica, é conhecida como sua forma forte. A diferença entre a forma fraca e a forma forte é que a pri-



Figura 4 - “A toca do coelho, no começo, alongava-se como um túnel, mas de repente abria-se como um poço, tão de repente que Alice não teve um segundo sequer para pensar em parar, antes de se ver caindo no que parecia ser um buraco muito fundo”. (Tradução, Isabel de Lorenzo; Ilustração, Débora Martignoni Tort).

meira considera somente a mecânica clássica e a segunda, todas as leis da física na forma prescrita pela TRR. De que modo o princípio da equivalência sugere um elo vital entre a gravitação e a geometria? É o que veremos a seguir.

### 3.1. O efeito Doppler gravitacional

De acordo com a TRR, dada uma fonte emissora de ondas eletromagnéticas  $E$  e um receptor  $R$ , as frequências de recepção  $f_R$  e emissão  $f_E$ , no caso em que os dois se afastam um do outro, relacionam-se entre si por meio da expressão [10]:

$$f_R = \gamma f_E \left(1 - \frac{V}{c}\right), \quad (14)$$

onde  $V$  é a velocidade do receptor (observador) relativa ao emissor (fonte), e  $\gamma$  é o fator de Lorentz, definido por  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$ . Para  $V \ll c$ , que será o caso aqui,  $\gamma \approx 1$ , logo,

$$f_R \approx f_E \left(1 - \frac{V}{c}\right). \quad (15)$$

Considere um pequeno laboratório de

altura  $H$  em queda livre no campo gravitacional esféricamente simétrico gerado por uma massa  $M$ ; por exemplo, o campo da Terra e um observador externo que mede a luz emitida com um receptor  $R$ , fixo no seu referencial. O valor de  $H$  deve ser pequeno para que o campo gravitacional possa ser aproximado como uniforme. Afixado ao chão do laboratório, há um emissor de ondas eletromagnéticas  $E$  verticalmente alinhado com o receptor  $R$  (Fig. 5). No instante  $t = 0$ , o emissor emite uma onda eletromagnética de frequência  $f_E$  que atravessa o teto transparente do laboratório e é registrada pelo receptor no instante  $t = H/c$ . Para o observador no laboratório em queda livre, caso houvesse um receptor no teto do laboratório, de acordo com o princípio de equivalência, não haveria mudança de frequência. Entretanto, para o observador externo, o laboratório e a fonte emissora  $E$  afastam-se do receptor  $R$  com velocidade  $V = gt$ . No instante  $t = H/c$  (Fig. 5), o laboratório terá caído  $H$  e a radiação atingido o receptor  $R$ ; logo, o observador externo escreverá

$$f_R = f_E \left( 1 - \frac{gH}{c^2} \right). \quad (16)$$

Isso nos mostra que a luz, por exemplo, é afetada pelo campo gravitacional e chega ao receptor fixo com uma frequência menor que a inicial: a luz é deslocada para o vermelho! Mas  $gH$  é a variação do potencial gravitacional da Terra calculada pelo observador externo, senão vejamos: o potencial gravitacional de uma massa  $M$  e raio  $r_M$  a uma distância radial  $r > r_M$  é dado por

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (17)$$

Segue que

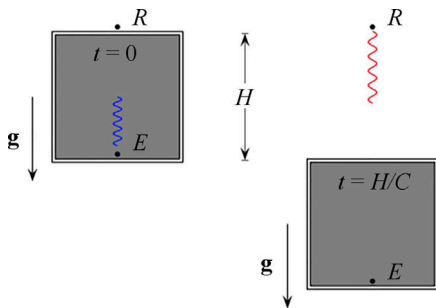


Figura 5 - O laboratório em queda livre tem altura  $H$  e seu teto é transparente para a luz emitida. Para o observador externo, o receptor permanece fixo.

$$\begin{aligned} \Phi(r+H) - \Phi(r) &= -\frac{GM}{r+H} + \frac{GM}{r} \\ &= -\frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{H}{r} \right)^{-1} + \frac{GM}{r}. \end{aligned} \quad (18)$$

Supondo  $H/r \ll 1$  e fazendo uso da aproximação  $(1+u)^p \cong 1 + \frac{p}{1}u$ , com  $p = -1$ , podemos escrever

$$\Phi(r+H) - \Phi(r) \cong gH. \quad (19)$$

Portanto, a relação entre as frequências de emissão e recepção pode ser posta na forma

$$f_R = f_E \left[ 1 - \left( \frac{\Phi(r+H) - \Phi(r)}{c^2} \right) \right]. \quad (20)$$

Suponha um relógio fixo a uma distância  $H \rightarrow \infty$ , isto é, a uma distância para a qual os efeitos gravitacionais são desprezíveis; então, como o período e a frequência têm uma relação recíproca inversa entre si, o observador externo pode escrever

$$\Delta t_r = \Delta t \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r} \right), \quad (21)$$

onde  $\Delta t_r$  é o intervalo de tempo marcado pelo relógio fixo em  $r$  e  $\Delta t$  o intervalo de tempo (que coincide com a medida do observador distante) na ausência de interação gravitacional, isto é, quando vale o espaço-tempo da relatividade restrita, ou métrica de Minkowski (ver Box 1):

$$\begin{aligned} c^2(\Delta\tau)^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 \\ &\quad - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Mas, em presença de um campo gravi-

tacional,

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r} \right)^2 c^2(\Delta t)^2$$

$$-(\Delta r)^2 \cong \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2, \quad (23)$$

pois  $\frac{GM}{c^2 r} \ll 1$ . Esse resultado parece indicar que o espaço-tempo em presença de um campo gravitacional deixa de ser plano! Mas ainda estamos longe de uma teoria completa.

### 3.2. A curvatura do espaço-tempo: o disco girante

Da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional é possível inferir que não é possível distinguir, localmente, uma aceleração uniforme de um campo gravitacional uniforme. Isto posto, como Einstein [1], considere um disco de raio  $R$ , contido em um plano fixo, e que gira com velocidade angular  $\omega$  constante, perpendicular ao plano que contém o disco e que passa por seu centro, ver a Fig. 6.

No centro do disco temos a origem do referencial  $K^*$  solidário com o disco girante. Considere também um segundo referencial inercial  $K$ , isto é: não girante, com origem no centro do disco. No referencial  $K$ , não há forças gravitacionais. Logo, em relação a  $K$ , o observador pode aplicar as leis da TRR, e examinar suas consequências. No referencial girante  $K^*$ , entretanto, há um campo de forças centrífugas que de acordo com uma das formulações do PE, é equivalente a um campo de forças gravitacionais. Embora, no caso do dis-

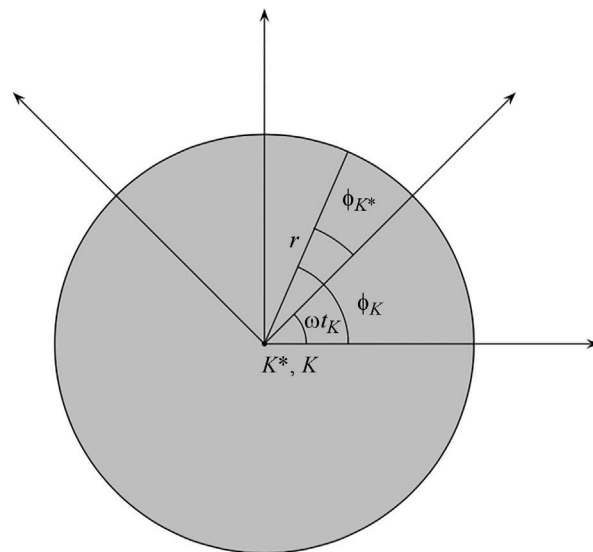


Figura 6 - Referencial  $K$  inercial e Referencial  $K^*$  fixo em um disco girante com velocidade angular  $\omega$  constante.

### Box 1: Tempo próprio, métrica

O espaço-tempo da relatividade restrita, o espaço-tempo de Minkowski, é plano (mas não euclidiano!) e um corpo que se move nesse espaço-tempo descreve uma trajetória dita *linha de mundo*. O corpo móvel carrega consigo um relógio que marca o tempo próprio,  $\tau$ . Se o corpo móvel for um humano, o tempo próprio pode ser registrado por seu relógio de pulso ou pelos batimentos de seu coração. Suponhamos que o corpo passe por dois eventos (como são chamados os pontos nesse espaço-tempo),  $A$  e  $B$ . A separação entre esses dois eventos, ou melhor, o intervalo, é definido por:

$$c^2(\Delta\tau)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

onde  $\Delta\tau = \tau_B - \tau_A$ ,  $\Delta t = t_B - t_A$  e  $\Delta x = x_B - x_A$  etc... Algumas vezes será conveniente escrever a parte espacial do intervalo ao quadrado entre dois eventos ao quadrado em coordenadas polares esféricas:

$$c^2(\Delta\tau)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 - r^2(\Delta\theta)^2 - r^2\sin^2\theta(\Delta\phi)^2.$$

O uso de coordenadas curvilíneas não implica necessariamente que o espaço-tempo seja curvo. Os coeficientes que multiplicam as variações de tempo e espaço são chamados coeficientes métricos. Na primeira expressão, os coeficientes métricos são:  $c^2$ ,  $-1$ ,  $-1$ , e  $-1$ . Na segunda,  $c^2$ ,  $-1$ ,  $-r^2$  e  $-r^2\sin^2\theta$ .

O importante é que a quantidade  $c^2(\Delta\tau)^2$  é um *invariante* frente a uma transformação de Lorentz; por exemplo, considere o caso em que

$$\begin{aligned}x &= \gamma x' + \gamma\beta ct'; \\y &= y'; \\z &= z'; \\ct &= \gamma\beta x' + \gamma ct';\end{aligned}$$

onde  $\beta = v/c$  e  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . As diferenças  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  e  $c\Delta t$  obedecem às mesmas transformações, segue então que

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2.$$

Portanto,  $c^2(\Delta\tau)^2$  é um invariante, isto é: tem a mesma forma e valor em qualquer referencial de Lorentz usado para etiquetar eventos no espaço-tempo de Minkowski. A forma da métrica de Minkowski que discutimos aqui é do *tipo tempo* com  $c^2(\Delta\tau)^2 > 0$ , pois a velocidade do observador é sempre menor do que  $c$ . Há mais duas possibilidades, *tipo espaço*:  $c^2(\Delta\tau)^2 < 0$  e *tipo luz*:  $c^2(\Delta\tau)^2 = 0$ . A escolha de uma dessas formas depende do contexto físico.

A forma geral de uma métrica é dada por

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x_0, x_1, x_2, x_3) \Delta x^\mu \Delta x^\nu,$$

onde as coordenadas  $x_0, x_1, x_2$  e  $x_3$  podem ser quaisquer, não sendo obrigatório que tenham significado métrico. As funções  $g_{\mu\nu}$  são os coeficientes métricos. No caso da métrica de Schwarzschild, vemos que

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2; g_{rr} = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}; g_{\theta\theta} = -r^2; g_{\phi\phi} = -r^2\sin^2\theta.$$

co, o campo cresce linearmente a partir do seu centro, não obedecendo à gravitação newtoniana. O observador em  $K$  escreverá o invariante quadrático relativístico  $c^2(\Delta\tau)^2$  levando em conta a contração de Lorentz e a dilatação do tempo dos relógios dispostos sobre círculos concêntricos traçados sobre o disco girante. Diferentemente do observador em  $K^*$ , o observador em  $K$  “vê” as unidades-padrão de comprimento (que devem ser muito menores do que o raio do disco) e os relógios em movimento, logo pode escrever:  $\Delta\ell_K = \gamma^{-1}\Delta\ell_{K^*}$  e  $\Delta t_K = \gamma\Delta t_{K^*}$ . A velocidade tangencial é expressa por  $v = \omega r$ , onde  $r$  representa a distância radial da origem. Segue, então, que o intervalo invariante tipo tempo se escreve:

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2(\Delta t_{K^*})^2 - (\Delta r)^2 - \frac{r^2(\Delta\phi_{K^*})^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}, \quad (24)$$

com  $0 \leq r \leq R$ . Observe que as distâncias radiais não são afetadas pela contração de Lorentz, pois são perpendiculares às velocidades tangenciais. Observe também que para diferentes valores de  $r$ , os relógios registram intervalos de tempo diferentes. O resultado dado pela Eq. (24) parece indicar que a geometria associada com o disco girante não é euclidiana. Para testar esta afirmação considere a borda do disco girante, isto é  $r = R$  e  $\Delta r = 0$ . Suponha que o observador  $K^*$  queira calcular o comprimento da circunferência da borda do disco gi-

rante, para isto ele faz  $\Delta t_{K^*} = 0$ . O intervalo invariante do *tipo espaço* se escreve,

$$(\Delta C^*)^2 = \frac{r^2(\Delta\phi_{K^*})^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \quad (25)$$

Segue que para o observador  $K^*$  o comprimento da borda do disco será

$$C^* = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi r. \quad (26)$$

Claramente, o resultado mostra que a geometria associada com o disco girante não é euclidiana.

### 3.3. Relatividade Geral

A importância do princípio da equivalência está no fato de que por meio

dele, Einstein se dá conta da conexão entre a gravitação e a geometria dos espaços curvos, a geometria de Riemann. Einstein identificou as trajetórias de duas partículas em queda livre, paralelas no referencial local, mas convergentes globalmente (Fig. 7), com uma certa classe de curvas da geometria de Riemann [11]. Começa então sua longa busca pela geometrização da gravitação (Box 2).

No espaço-tempo quadridimensional, entre dois eventos A e B, um observa-

dor segue uma trajetória tal que a duração da viagem registrada por seu relógio é máxima e corresponde ao *tempo próprio* (Fig. 8). O tempo próprio é o mesmo para qualquer observador inercial einsteiniano. O caminho mais curto entre dois pontos da geometria euclidiana tridimensional, um segmento de reta, é substituído no espaço-tempo por um segmento de uma classe mais abrangente de curvas: *as geodésicas*. As geodésicas são determinadas pelas soluções das equações de Einstein. Essas

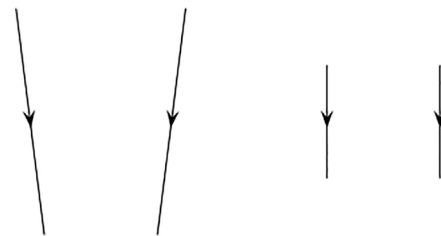


Figura 7 - Trajetórias geodésicas vistas global e localmente para duas partículas em queda livre em direção à Terra.

### Box 2: Resumo histórico das origens da TRG

Após concluir a TRR, Einstein estava profundamente incomodado com dois pontos: (i) a restrição da teoria aos referenciais inerciais e (ii) a relação entre a energia e a inércia; mas como relacionar a energia ao “peso” [19]? O primeiro ponto significava estender a teoria da relatividade para quaisquer referenciais, inerciais ou não, e o segundo ponto implicava em criar uma teoria da gravitação relativística. Em 1907, convidado por J. Stark para escrever um artigo de revisão sobre a teoria da relatividade, Einstein debruçou-se uma vez mais sobre essas duas questões. Como relacionar os efeitos inerciais com os gravitacionais? Galileu foi o primeiro a notar que todos os corpos, independentemente de sua massa ou composição, caíam com a mesma aceleração nas proximidades da Terra (desprezando a resistência do ar). Newton logo depois notou a igualdade entre as massas inercial e gravitacional (presente na lei da gravitação universal). Assim, o resultado galileiano seria uma consequência dessa igualdade.

Um fato curioso e inexplicável pela mecânica newtoniana foi fundamental para que Einstein começasse a resolver esses pontos. Como era comum no seu modo de pensar, Einstein valeu-se de um experimento mental: imaginou o que ocorreria se estivesse dentro de um elevador em queda livre. Percebeu que, nesse caso, não perceberia os efeitos do peso. Depois, invertendo o raciocínio: imaginou um foguete numa região onde se possa desprezar a interação gravitacional. O foguete começa a acelerar e o observador dentro do foguete não poderia saber, por meio de qualquer experimento, se o foguete está acelerado ou se está em repouso num campo gravitacional. Einstein concluiu o que chamou de pensamento mais feliz da sua vida [5], o princípio da equivalência (PE). Este pode ser enunciado da seguinte forma [10]: em um recinto suficientemente pequeno para que o campo gravitacional dentro dele possa ser tomado como uniforme, todas as leis físicas são as mesmas que em um referencial inercial, na ausência de um campo gravitacional.

Em 1911, Einstein propõe um teste para o PE. No caso de um foguete acelerado, um raio de luz terá uma trajetória curva ao invés de uma retilínea. Pelo PE, isso seria equivalente ao foguete estar em repouso num campo gravitacional uniforme, de modo que a trajetória do raio de luz em um campo gravitacional seria curva! Esse efeito com certeza seria muito pequeno nas proximidades da Terra. Qual seria então o corpo celeste com poder de encurvar a luz para que fosse possível medir o desvio na trajetória do raio luminoso? Seria o Sol capaz de desviar a luz das estrelas? Esse cálculo foi feito por Einstein e o resultado encontrado foi a metade do resultado obtido por ele, em 1915, já com as equações completas da TGR. Interessante notar que na mecânica newtoniana já se podia pensar na luz como tendo sua trajetória defletida [15].

Em 1912, Einstein voltou-se para o problema do disco girante. Ele nota o fato de o comprimento transversal não sofrer contração de Lorentz, enquanto os comprimentos ao longo da velocidade a sofrem. Com isso, infere que a geometria do disco não poderia ser euclidiana. O caminho para a TRG passa pelo estudo de geometrias não euclidianas. Nesse ano, Einstein encontra-se com um amigo de graduação, o matemático Marcel Grossman. Grossman já o tinha ajudado antes e apresenta a Einstein as generalizações de Riemann da teoria gaussiana das superfícies e o cálculo tensorial dos italianos Gregorio Ricci e Tulio Levi-Civita. Esta ferramenta era de extrema importância, pois possibilitava de maneira natural relacionar as diversas grandezas físicas medidas por referenciais distintos e arbitrários (não há mais a restrição aos referenciais inerciais). Com base no cálculo tensorial, Einstein e Grossman propõem a primeira equação para o campo gravitacional, que se mostrou incorreta, pois não dava o valor correto do avanço do periélio de Mercúrio e, pior que isso, a gravitação newtoniana não era obtida no limite de campo gravitacional fraco. Passam-se três anos de luta, durante os quais Einstein começa a duvidar do cálculo tensorial como a linguagem correta para expressar as leis físicas na TRG. Algumas equações são propostas, mas nenhuma delas resolveu os dois problemas. Em 1915, Einstein nota que havia um erro no seu artigo com Marcel Grossman de 1913, corrige-o e assim encontra as equações do campo gravitacional ou equações de Einstein. Embora a solução dessas equações seja bastante complicada, sua interpretação é bastante simples: o campo gravitacional é a geometria do espaço-tempo e a curvatura é a grandeza presente nas equações no lado esquerdo; já no lado direito, está o conteúdo de matéria, cuja densidade de energia e momento linear seriam as fontes da curvatura da geometria do espaço-tempo. Com suas novas equações, Einstein encontra o valor correto para o avanço do periélio de Mercúrio, resolvendo assim um problema que perdurava na astronomia e, para campos fracos, a gravitação newtoniana era obtida. Para outro teste de sua teoria, ele recalcula o desvio de um raio de luz nas proximidades do Sol [15] e encontra o dobro do resultado de 1911. Essa proposta foi posta à prova durante o eclipse solar total de 1919, com observações feitas em Sobral (CE). O resultado era consistente com o previsto pela teoria. De todas as (enormes) contribuições de Einstein à física, segundo ele próprio, a TRG foi a que lhe deu mais felicidade. Maiores detalhes sobre a origem da TRG podem ser encontradas na apresentação de Youtube feita por um dos autores [20].



equações relacionam a geometria não euclidiana do espaço-tempo com a distribuição de matéria e energia presentes. As equações de Einstein estabelecem essencialmente que:

$$\text{geometria (curvatura) do espaço - tempo} = \text{constante} \times \text{distribuição de matéria e energia.} \quad (27)$$

É uma tarefa formidável resolver essas equações e, a partir das soluções, determinar as curvas que maximizam a trajetória espaço-temporal, isto é: as geodésicas temporais ou nulas, aquelas para as quais o tempo próprio é positivo ou nulo, respectivamente.

Mas o que queremos dizer quando falamos em soluções das equações de Einstein? Simplesmente, uma expressão para a separação quadridimensional entre dois eventos ou, no jargão relativístico, a *métrica* (Box 1).

#### 4. O princípio da equivalência e o espaço-tempo de Schwarzschild

Em 1916, Karl Schwarzschild (1837-1916 – Fig. 9) obteve a primeira e talvez a mais importante solução exata das equações da relatividade geral [12]. Essa solução, ou métrica, determina a separação entre dois eventos, ou seja, dois pontos do espaço-tempo (ver Box 1), para o caso em que temos uma massa central  $M$  não girante e eletricamente neutra. Como há simetria esférica,



Figura 8 - O relógio de bolso do Coelho Branco em Alice no País das Maravilhas registra o tempo próprio  $\tau$ . (Ilustração, Débora Martignoni Tort).

ca, a solução, isto é, a métrica de Schwarzschild, depende apenas da distância radial  $r$  e dos ângulos polares  $\theta$  e  $\varphi$ . Mais ainda, a solução é estática, isto é, não depende do tempo. No limite apropriado, a métrica de Schwarzschild reproduz a métrica do espaço-tempo plano de Minkowski.

Em princípio, a obtenção desse resultado requer que resolvamos as equações de Einstein, o que está fora do escopo deste trabalho. Entretanto, o princípio da equivalência permite-nos obter esse resultado de uma maneira simples [13].

Considere um corpo de massa  $m$  em queda livre radial a partir do repouso no campo gravitacional de uma massa puntiforme  $M$  e inicialmente muito distante desta; logo, sua energia mecânica  $E$  é zero. Em relação ao observador distante, a velocidade radial instantânea da massa  $m$  é  $v$ . Considere um referencial de Lorentz comóvel com  $m$ . Nesse referencial, o corpo está instantaneamente em repouso e o observador inercial einsteiniano comóvel com o corpo escreverá a métrica localmente plana (lembre-se de que a queda livre é radial), logo

$$c^2(\Delta\tau)^2 = c^2(\Delta t^*)^2 - (\Delta r^*)^2, \quad (28)$$

que expressa a métrica de Minkowski local. Porém, para o observador distante, as variações de distância  $\Delta r^*$  medidas pelo observador comóvel com réguas instantaneamente em repouso sofrem contração de Lorentz, pois para

ele estão em movimento, isto é,

$$\Delta r = \frac{\Delta r^*}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta r^*, \quad (29)$$

e os relógios do observador inercial comóvel que marcam intervalos tempo  $\Delta t^*$  sofrem dilatação temporal:

$$\Delta t = \gamma \Delta t^* = \frac{\Delta t^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (30)$$

Portanto, o observador distante reescreve a métrica local na forma:

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2(\Delta t)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} (\Delta r)^2. \quad (31)$$

Suponha agora que o corpo em queda livre desde o infinito tenha uma energia mecânica  $E$  nula. A uma distância radial  $r$  de  $M$ , para o observador distante, sua energia se escreve:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0; \quad (32)$$

segue que

$$v^2 = \frac{2GM}{r} \quad (33)$$

(ver Box 3). Se agora substituirmos  $v$  pela velocidade da luz (módulo)  $c$ , definiremos o raio de Schwarzschild por

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (34)$$

e substituirmos essa definição na métri-



Figura 9 - Karl Schwarzschild em seu escritório. (Fonte: Wikipédia.)



ca do observador distante, obteremos

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2(\Delta t)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}(\Delta r)^2 - r^2(\Delta\Omega)^2, \quad (35)$$

que representa a métrica de Schwarzschild nas coordenadas do observador distante. Observe que no final acrescentamos a parte espacial angular

$$(\Delta\Omega)^2 = \text{sen}^2(\theta)(\Delta\theta)^2 + (\Delta\phi)^2. \quad (36)$$

Observe também que no limite  $r \rightarrow \infty$  recuperamos a métrica de Minkowski em coordenadas plano-polares (ver Box 1). O resultado está em completo acordo com o obtido de modo rigoroso por Schwarzschild em 1916 [12].

O raio de Schwarzschild define um conceito importante para a física do objeto mais fascinante do nosso universo, como veremos a seguir: o buraco negro! Conjuntamente com o conceito de velocidade de escape, ele pode ser inferido já a partir dos trabalhos pioneiros de John Mitchell e de Laplace [14, 15].

#### 4.1. A métrica de Schwarzschild e o buraco negro

Como mencionado, a ideia de uma estrela com atração gravitacional suficiente para impedir que a luz escape não é novidade [14, 15]. Entretanto, é na TRG que o conceito é reformulado do ponto de vista teórico e, posteriormente, submetido à prova observacional. Vejamos como isso ocorre.

Se examinarmos a métrica de Schwarzschild veremos que, quando  $r = r_s$ , o coeficiente que multiplica  $(\Delta t)^2$  é nulo e o que multiplica  $(\Delta r)^2$  é indefinido ( $1/0$ ). Por outro lado, para  $r < r_s$  há uma mudança de sinal desses coefi-

cientes que parece indicar que  $r$  e  $t$  trocam seus respectivos papéis. Essas anomalias da métrica nos levam a concluir que a métrica de Schwarzschild é válida somente para  $r > r_s$ . No entanto, uma surpresa nos aguarda se examinarmos o limite  $r \rightarrow r_s$ , onde  $r$  inicialmente é maior do que  $r_s$ .

#### 4.2. O deslocamento gravitacional para o vermelho

Suponha que uma onda eletromagnética de comprimento de onda  $\lambda_E$  (ou um fóton) seja emitida pelo emissor em  $r = r_E$  no intervalo de tempo próprio  $\Delta\tau_E$  e que ela chegue ao receptor em  $r = r_R$  durante o intervalo de tempo próprio  $\Delta\tau_R$ . Observe que para o emissor e o receptor  $\Delta r = \Delta\Omega = 0$  (Fig. 10). Da métrica de Schwarzschild, ressaltando

que os relógios fixos em  $r_E$  e  $r_R$  marcam intervalos de tempo próprios e que  $\Delta t$  é o intervalo de tempo associado com o observador distante, temos

$$(\Delta\tau_E)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r_E}\right)(\Delta t)^2, \quad (37)$$

e no receptor,

$$(\Delta\tau_R)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r_R}\right)(\Delta t)^2. \quad (38)$$

Por outro lado, os comprimentos de onda no emissor e no receptor são definidos por:

$$\lambda_E = c\Delta\tau_E, \quad (39)$$

e

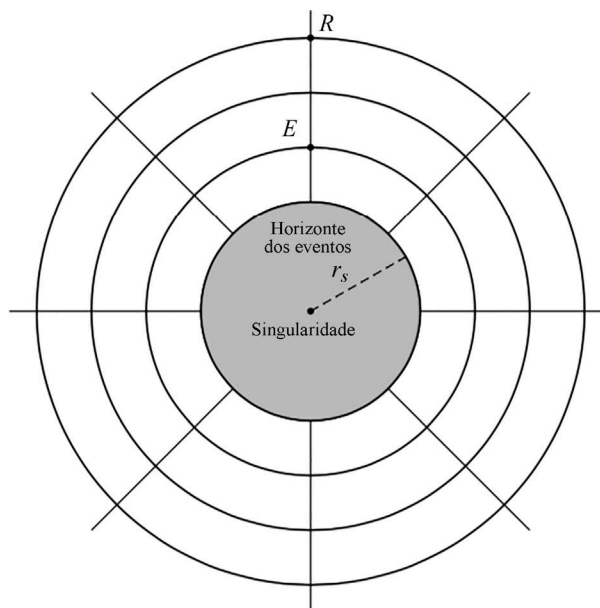


Figura 10 - Efeito Doppler gravitacional no espaço-tempo de Schwarzschild.

#### Box 3: Uma dedução heurística da velocidade radial de queda livre

Suponha um corpo inicialmente em repouso para  $r \rightarrow \infty$ . Sua energia inicial será  $E_0 = mc^2$ , onde  $m$  é sua massa de repouso. Sua energia em  $r$  será:

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{GMm}{r},$$

onde  $p = \gamma mv$  é o momento linear relativístico. Se supusermos que  $\gamma \approx 1$ ,  $\mathbf{p}^2 c^2 \ll m^2 c^4$ , podemos escrever

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}.$$

Como a energia é uma constante de movimento,  $E_0 = E$ , e segue então que a velocidade radial como função de  $r$  é dada por

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{r_s}{r}} c,$$

onde utilizamos a definição do raio de Schwarzschild  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ .

$$\lambda_R = c\Delta\tau_R. \quad (40)$$

Segue que

$$\frac{\lambda_E}{\lambda_R} = \frac{\left(1 - \frac{r_s}{r_E}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{r_s}{r_R}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (41)$$

Com a relação de dispersão  $\lambda f = c$ , podemos escrever essa expressão em termos das frequências de emissão e recepção:

$$\frac{f_E}{f_R} = \frac{\left(1 - \frac{r_s}{r_E}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{r_s}{r_R}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (42)$$

A previsão do efeito Doppler gravitacional é um dos três testes clássicos da teoria da relatividade geral e foi verificada experimentalmente apenas em 1959 para campos fracos e uniformes, por Pound e Rebka [16].

### 4.3. O buraco negro de Schwarzschild

Suponha agora que  $r_E \rightarrow r_s$ . Então, a razão  $\frac{f_E}{f_R} \rightarrow 0$  e, como a frequência da onda no emissor não é nula,  $f_R \rightarrow 0$ , ou  $\lambda_R \rightarrow \infty$ . Isso significa que o espectro eletromagnético como um todo sofre um *superdeslocamento para o vermelho*; em outras palavras, torna-se completamente invisível, temos um buraco negro! Além do desvio para o vermelho, temos ainda dois testes clássicos da relatividade geral: o avanço do periélio de mercúrio e a deflexão da luz em um campo gravitacional. No Box 4 esboçamos como as equações das órbitas são alteradas, permitindo o cálculo destas duas últimas quantidades

#### 4.3.1. Dentro do buraco negro

E o que acontece na região  $r < r_s$ ? Para responder a essa pergunta, imaginemos que nossa pequena Alice seja uma astronauta e caia radialmente em queda livre desde o infinito ( $r \rightarrow \infty$ ) em direção à singularidade ( $r \rightarrow 0$ ), com velocidade inicial nula. A ampla liberdade na escolha de referenciais e sistemas de coordenadas da TRG permite que examinemos o interior do buraco negro com uma métrica mais adequada a essa situação. É possível mostrar que podemos substituir a métrica de Schwarzschild pela métrica associada com uma sucessão de referenciais em queda livre comóveis que acompanham Alice do início ao final do movimento. Com o PE e as transformações de Lorentz locais, é possível mostrar que a métrica de Schwarzschild pode

ser posta da forma [17]:

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2(\Delta t^*)^2 - 2\sqrt{\frac{r_s}{r}}c\Delta t^*\Delta r - (\Delta r)^2, \quad (43)$$

onde  $(\Delta t^*)^2$  é o intervalo de tempo medido no referencial em queda livre comóvel com Alice. Essa métrica, a métrica de Painlevé-Gullstrand ou P-G, é global, isto é: pode ser usada tanto dentro como fora do buraco negro não-girante, desde que a partícula-teste parta do repouso do infinito e siga uma geodésica radial. No entanto, tenha em mente que a métrica P-G reflete o ponto de vista do observador em queda livre, isto é, de Alice! A velocidade  $\sqrt{\frac{r_s}{r}}c$  na métrica dada pela Eq. (38) coincide com o valor newtoniano, basta usar a definição de  $r_s$  para verificar isso. Note que agora não temos problemas de indefinição quando  $r = r_s$ . A única singularidade que permanece é a singularidade essencial em  $r = 0$ .

Suponha agora que o traje de Alice esteja equipado com duas poderosas lanternas, uma frontal e outra de ré, que emitem raios de luz para a frente e para trás (Fig. 11). O que acontece com esses raios do ponto de vista de Alice? Para responder a essa pergunta, convém fatorar a métrica de P-G e reescrevê-la na forma

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \left[ \Delta r + \left(1 + \sqrt{\frac{r_s}{r}}c\Delta t^*\right) \right] \times \left[ \Delta r - \left(1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}}c\Delta t^*\right) \right]. \quad (44)$$

Como estamos tratando com luz, devemos fazer  $c^2\Delta\tau^2 = 0$  (ver Box 1). Temos então duas possibilidades para a velocidade radial dos raios de luz (do ponto de vista de Alice!):

$$\frac{\Delta r}{\Delta t^*} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}}c - c, \quad (45)$$

e

$$\frac{\Delta r}{\Delta t^*} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}}c + c, \quad (46)$$

onde a Eq. (45) refere-se à lanterna frontal (a) e a equação (46) refere-se à lanterna traseira (b). Levando em conta que o sinal negativo indica que  $r$  decresce, vemos que a condição (a) significa que o pulso dianteiro se propaga em direção à singularidade em  $r = 0$ , desde o início até o final da queda

de Alice. Por outro lado, a condição (b) indica que o pulso de luz traseiro se propaga em direção ao observador, posicionado a uma distância radial  $r > r_s$ , com uma velocidade inferior a  $c$ . Para ambos os casos, somente quando Alice estiver no início da sua queda livre no infinito ela poderá dizer que os raios de luz se propagam com velocidade  $-c$  e  $+c$ . Mas, em  $r = r_s$ , (a) mostra que a velocidade da luz é  $-2c$ , porém (b) mostra que a velocidade da luz é zero! Depois, como a partir daí  $r < r_s$ , o sinal negativo predomina, indicando que a luz emitida pela lanterna de ré também se dirige para a singularidade essencial. O comportamento do cone de luz local de Alice é mostrado na Fig. 12. Observe que o cone de luz fica cada vez mais fechado à medida que Alice se aproxima da singularidade e colapsa em  $r = 0$ ; a velocidade da luz é infinita! A pequena Alice também não poderá escapar da atração fatal da singularidade! Nós a perderemos para sempre.

O buraco negro de Schwarzschild (Fig. 13) é o mais simples desses objetos fascinantes, mas há outros bem mais complexos. Buracos negros são caracterizados por sua massa  $M$ , momento angular  $J$  e por sua carga elétrica  $Q$ . Para cada caso, há uma métrica apropriada que descreve o espaço-tempo associado. A Tabela 2 resume os quatro casos

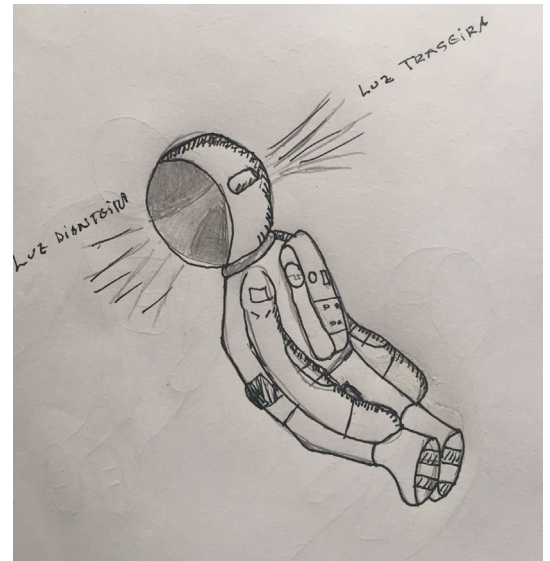


Figura 11 - Alice em queda livre. O fundo do poço é a singularidade essencial. Note que o efeito da espaguetificação está sendo ignorado. Se levado em conta, Alice seria despedaçada pelas poderosas forças de maré geradas pelo buraco negro bem antes de cruzar o horizonte dos eventos. (Desenho de Victor Bernardo Filgueiras Picallo.)

#### Box 4: A equação da órbita, a precessão de Mercúrio e o desvio da luz

Como a métrica de Schwarzschild descreve um espaço-tempo esféricamente simétrico e estático, podemos fazer  $\theta = \pi/2$  e considerar apenas o plano equatorial, nesse caso

$$c^2(\Delta\tau)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2(\Delta t)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} (\Delta r)^2 - r^2(\Delta\phi)^2.$$

Por outro lado, é possível mostrar que se um corpo de massa  $m$  segue uma geodésica nesse espaço-tempo, há duas constantes de movimento:

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau},$$

a energia por unidade de massa  $\frac{E}{m}$ , e

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau},$$

o momento angular por unidade de massa  $\frac{L}{m}$ . Com a métrica e essas duas constantes de movimento, podemos obter a equação da órbita para partículas com massa

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E}{L}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left[\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Para fótons, a equação da órbita é obtida da equação acima fazendo  $m = 0$ .

A equação da órbita é a versão da relatividade geral da equação de Binet, que descreve o problema de dois corpos da mecânica clássica e, em particular, o problema de Kepler.

A equação da órbita permite resolver o problema da precessão de Mercúrio e do desvio da luz em presença de uma massa central  $M$ . Os resultados teóricos são comprovados pela observação.

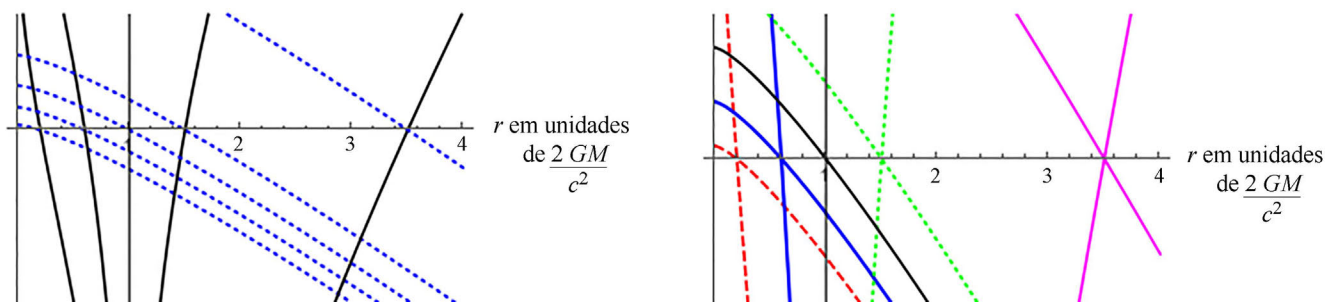


Figura 12 - O gráfico à esquerda mostra as trajetórias dos raios de luz saintes, as curvas contínuas em preto; e as entrantes, as curvas pontilhadas em azul. Ambas as curvas são soluções das Eqs. (45) e (46) e são tecnicamente conhecidas como geodésicas nulas. No gráfico à direita, vemos os cones de luz locais cada vez mais fechados à medida que Alice, no vértice dos cones de luz locais, cai em direção à singularidade em  $r = 0$ .

Tabela 2: Classificação dos buracos negros. Apenas os buracos negros de Schwarzschild e Kerr são relevantes do ponto de vista astrofísico.

Massa ( $M$ )	Momento angular (J)	Carga (Q)	Nomenclatura
Sim	Não	Não	Schwarzschild
Sim	Sim	Não	Kerr
Sim	Sim	Sim	Kerr-Newman
Sim	Não	Sim	Reissner-Nordström

conhecidos. A importância dos buracos negros decorre de seu poder de criar cenários espaço-temporais extremos, logo, perfeitos para testar a teoria da relatividade geral.

#### 5. Observações finais

Um caminho tortuoso, cheio de idas e vindas, leva à formulação final da

TRG, isto é: às equações de Einstein (ver Box 2). Equipado com as ferramentas matemáticas adequadas, o cálculo tensorial e as formas diferenciais que nos permitem analisar as geometrias não-euclidianas, o estudante moderno pode, em princípio, postulá-las e resolvê-las, obtendo dessa forma a métrica apropriada, ou, mais precisamente, os

coeficientes métricos  $g_{\mu\nu}$  que contêm toda a informação necessária para descrever o espaço-tempo determinado por uma dada distribuição de matéria e energia. Em outras palavras, o PE não é mais necessário! No entanto, de um ponto de vista pedagógico, o PE é ainda o melhor modo de introduzir o professor do Ensino Médio e os estudantes in-

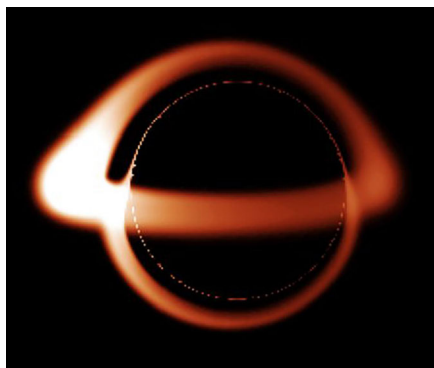


Figura 13 - Aparência prevista por O. Straub, F.H. Vincent, M.A. Abramowicz, E. Gourgoulhon e T. Paumard, na Ref. [18], de um buraco negro de Schwarzschild com um anel toroidal de matéria ionizada. O modelo descreve Sagitário A\*. A assimetria da radiação é provocada pela forte influência do efeito Doppler, pois a matéria ionizada deve circular em torno do buraco negro com velocidade orbital muito alta para compensar a enorme atração gravitacional. Fonte: Wikipedia.

telectualmente mais inquietos e curiosos ao mundo maravilhoso da mais bela das teorias clássicas, em um nível além do puramente descritivo.

### Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Dra. Mariana Francisquini pela leitura minuciosa do manuscrito original e ao Dr. Nelson Studart pelas sugestões no presente trabalho.

Recebido em: 8 de Dezembro de 2020

Aceito em: 15 de Dezembro de 2020

### Referências

- [1] A. Einstein, *A Teoria da Relatividade Especial e Geral* (Contraponto, Rio de Janeiro, 1999).
- [2] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica, Vol. 1 Mecânica* (Blucher, São Paulo, 2013), p. 368, 369.
- [3] H.C. Ohanian, R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime* (Norton, New York, 1994), 2nd ed.
- [4] O.A. Acevedo, E.M. Morais, B.M. Pimentel, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **41**, e20180329 (2019).
- [5] A. Pais, 'Subtle is the Lord...' *The Science and the Life of Albert Einstein* (OUP, Oxford, 1982). Edição brasileira: *Sutil é o Senhor: A Ciência e a Vida de Albert Einstein* (Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995).
- [6] A. Eddington, *Space, Time & Gravitation* (CUP, Cambridge, 1920).
- [7] L. Carroll, *Alice in Wonderland* (J.M. Dent & Sons LTD, London, 1865)
- [8] I. Newton, *The Principia, Mathematical Principles of Natural Philosophy*, translation by I.B. Cohen, A. Whitman, J. Budenz (University of California Press, Berkeley, 1999).
- [9] R.R. Machado, A.C. Tort, C.A.D. Zarro, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **42**, e20200278 (2020).
- [10] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica, Vol. 4 Ótica, Relatividade, Física Quântica* (Blucher, São Paulo, 1998).
- [11] B. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 2009), 2nd ed.
- [12] K. Schwarzschild, arXiv:physics/9905030 [physics] 12 May 1999 (tradução para o inglês do original em alemão).
- [13] S.M. Blinder, arXiv: 1512.02061v1 [physics-pop-ph], 3 Dec 2015.
- [14] R.R. Machado, A.C. Tort: Michell, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **38**, e2314 (2016).
- [15] H.L. Cezar, P.J. Pompeia, N. Studart, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **41**, e20190238 (2019).
- [16] R.V. Pound, G.A. Rebka Jr., *Phys. Rev. Lett.* **3**, 439441 (1959).
- [17] E.F. Taylor, J.A. Wheeler, *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity* (Addison-Wesley-Logman, New York, 2000).
- [18] O. Straub, F.H. Vincent, M.A. Abramowicz, E. Gourgoulhon, T. Paumard, *Astron. Astroph.* **543**, A8 (2012).
- [19] Y.A. Ono, *Physics Today* **35**, 45 (1982).
- [20] C.A.D. Zarro, [https://www.youtube.com/watch?v=R\\_qnfp82h20](https://www.youtube.com/watch?v=R_qnfp82h20) (acesso em 18/11/2020).