

**MNPEF**  
Mestrado Nacional  
Profissional em  
Ensino de Física



## **PRODUTO EDUCACIONAL**

# **SEQUÊNCIA DIDÁTICA: MEDIÇÕES SEM INTERAÇÃO EM UM INTERFERÔMETRO**

**LENILSON RODRIGUES DE OLIVEIRA**

**PROF. DR. MATHEUS PEREIRA LOBO**

**UFT 2019**

## Sumário

INTRODUÇÃO.....	3
1 TÓPICOS DE MECÂNICA QUÂNTICA.....	5
2 UM BREVE RESUMO SOBRE INTERFERÊNCIA.....	7
3 UMA REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS.....	11
4 UMA BREVE REVISÃO DE MATRIZES.....	12
5 ESPAÇOS VETORIAIS NA MECÂNICA QUÂNTICA.....	14
6 MEDIÇÕES LIVRES DE INTERAÇÃO EM UM INTERFERÔMETRO TIPO MACH-ZEHNDER (SEM OBJETO) .....	16
7 MEDIÇÕES LIVRES DE INTERAÇÃO, MACH-ZEHNDER COM OBJETO (CLÁSSICO) .....	22
REFERÊNCIA.....	26
APÊNDICE C.....	27

## **Agradecimentos**

Agradecemos à Universidade Federal do Tocantins a todo o suporte dado para a efetivação deste produto educacional, ao Mestrado Profissional em Ensino de Física, da Sociedade Brasileira de Física. Destacamos ainda que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. E agradeço também aos professores do colegiado de física da Universidade Federal do Tocantins (campus Araguaína) pelo empenho e dedicação nesse mestrado, possibilitando um desenvolvimento educacional em todas as regiões do Brasil.

## **LISTA DE SIGLAS**

**MQ** – Mecânica Quântica

**ENEM** – Exame Nacional do Ensino Médio

**FC** – Física Clássica

**FQ** – Física Quântica

## INTRODUÇÃO

Este produto faz parte da dissertação de mestrado com o objetivo de auxiliar professores que estejam ministrando aulas de física no terceiro ano do ensino médio, e que se interesse em ministrar aulas sobre a Física Quântica (FQ). Estritamente, propõe-se uma Sequência Didática para ensinar tópicos da Mecânica Quântica (MQ), sendo um deles sobre o interferômetro de Mach-Zehnder com experimentações teóricas (cálculos matemáticos envolvendo conceitos e definições da física). Após sete anos ministrando aula de física na rede estadual de ensino do Estado do Tocantins, e tentativas frustradas na inserção da MQ, seja por falta de materiais específicos sobre o tema ou por não serem cobrados nos vestibulares ou pelo próprio ENEM, se observa a necessidade urgente da inserção destes tópicos para que possamos proporcionar aos alunos uma integração com todo o aparato tecnológico que encontramos no dia a dia. É fundamental ressaltar que mesmo não sendo cobrado nas seleções para os cursos superiores, é necessário reconhecer que o desenvolvimento da física está acontecendo nos dias atuais de maneira bem mais rápida e que estes temas da física quântica estão no nosso cotidiano. É com essa motivação que produzimos um material que insira tópicos de Física Quântica, possibilitando um interesse maior dos alunos durante as aulas. Adicionado a isto, constatamos que os livros didáticos adotados pelo Ministério da Educação (BEATRIZ, 2010; TORRES et al., 2016; GUALTER; NEWTON; HELOU, 2016) apresentam alguns pontos da Física Quântica de forma incompleta, fora do contexto histórico e confusa. Este produto busca a inserção de tópicos da física quântica na educação básica, sendo justificada a sua importância ao volume de aplicações que nos deparamos cotidianamente. Nesse contexto, é indispensável que o aluno do ensino médio conheça os princípios básicos da tecnologia atual, pois provavelmente ela poderá definir o seu futuro profissional (OSTERMANN; MOREIRA, 2001; TERRAZAN, 1992).

O debate em alguns pontos da FQ nessa sequência didática foi feito através de experimentações teóricas realizadas com uma linguagem matemática acessível e com símbolos de nível superior, porém de possível entendimento dos estudantes do ensino médio. Dessa maneira, possibilita-se um descobrimento já na educação básica de símbolos e significados físicos que a matemática da mecânica clássica não viabiliza. O uso teórico da mecânica quântica é uma estratégia viável, devido às escolas da rede pública geralmente não possuírem laboratórios equipados e disponíveis, esses fenômenos discutidos na FQ são relacionados principalmente à escala atômica, devido a

isso fica muito mais dificultosa a montagem de experimentos de baixo custo em sala de aula.

É notório que nos últimos anos há um empenho em desenvolver alguns experimentos de baixo custo para esta finalidade. Contudo, nossas escolas estão em dificuldades financeiras e estruturais para implementar um projeto deste tipo. Considerando que o desenvolvimento teórico através de “novos” cálculos matemáticos, conceitos e definições físicas para esses estudantes possa culminar em uma física que motive e discuta novas aplicabilidades não conhecidas e novas ideias das tecnologias atuais.

A Física Quântica quase não é vista ou sequer apresentada no ensino médio. É por isso que utilizaremos as teorias de aprendizagem de Ausubel, pois a aprendizagem significativa representa um processo no qual o indivíduo busca e adquire informações, onde a nova informação construída pelo aluno assume um significado por meio de sua estrutura cognitiva. A aprendizagem mecânica é o que aplicaremos no primeiro momento, pois os alunos nunca estudaram física quântica na vida. É importante destacar que apresentaremos aos discentes conceitos abstratos não preexistentes na sua estrutura cognitiva. No processo de maturação dos conceitos, leis e fórmulas da aprendizagem mecânica, observaremos o armazenamento das informações de forma aleatória e a não ocorrência de uma interligação entre o novo e o já existente. As teorias de Ausubel afirmam que há um processo continuado em que a aprendizagem mecânica pode se tornar significativa. Neste produto observaremos com detalhes essa passagem (AUSUBEL, 1980; MOREIRA, 2013).

O entendimento em torno da física clássica dominante nos currículos do ensino médio até hoje, é que ela se estende até o século XIX. A maioria dos fenômenos que acontecem no dia a dia tais como, o movimento dos corpos macroscópicos, a óptica e a eletricidade são temas relacionados à FC. Entretanto, a partir de 1850, a FC começou a ser questionada quanto às explicações de dados relacionados à difração de elétrons, à emissão de corpos aquecidos, modelos atômicos e o efeito fotoelétrico. Ao perceber que a FC falhava na explicação de alguns fenômenos, fez-se necessário várias transformações no desenvolvimento de novos conceitos físicos. Consequentemente nascia a Física Moderna. A partir de 1900, surgia um novo conceito físico, a Física Quântica (FQ), onde o centro do estudo são os sistemas físicos que possuem dimensões próximas ou abaixo da escala atômica, isto é, com o intuito de entender os fenômenos relativos às moléculas, átomos e partículas subatômicas.

Em muitos aparelhos eletrônicos que observamos no cotidiano vemos a FQ presente, por exemplo, em dispositivos eletrônicos, diodos, lasers, displays de cristal líquido, leitoras ópticas, dispositivos automáticos, dentre outros. No início do século XX a FQ surgia, mas somente nas últimas décadas começou a ser acrescentado no ensino de física e nos currículos das escolas de nível médio do Brasil (OSTERMANN, 2001). Portanto, o material apresentado tem um objetivo de construir uma sequência didática que possibilite a inserção de conteúdo do ensino médio de alguns conceitos básicos de MQ, permitindo uma abordagem inovadora e capaz de minimizar os problemas enfrentados pelos professores da Educação Básica. O interferômetro de Mach-Zehnder também é um exemplo da MQ, pois a precisão de seus experimentos e suas aplicabilidades são de extrema importância para o descobrimento de muitos processos tecnológicos atuais.

## 1 TÓPICOS DE MECÂNICA QUÂNTICA

- A mecânica quântica em conjunto com a teoria quântica de campos são formulações fundamentais da física na escala atômica e subatômica.
- Na teoria quântica de campos associa-se a discretização do campo a uma partícula.
- As unidades das escalas atômicas mais utilizadas na física para as grandezas da ordem do átomo, são o nanômetro ( $10^{-9} m$ ) e o ângstrom ( $10^{-10} m$ ).
- Em escalas macroscópicas, a física clássica pode ser derivada a partir da mecânica quântica.
- Na física clássica, o estado de uma partícula pode ser definido pela posição e seu momento (o produto da massa por sua velocidade). Utilizando essas duas grandezas, é possível estimar, em um determinado instante, os resultados de qualquer medida realizada sobre ela.
- Na física quântica, o elétron, próton, nêutron, fóton, dentre outras partículas, não é possível prever com certeza o resultado de qualquer medida realizada sobre ela. O

que se obtém são probabilidades de a medida fornecer os vários valores possíveis para as grandezas relevantes.

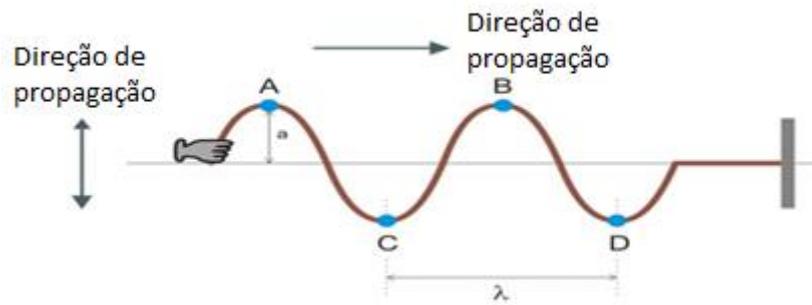
- Na mecânica quântica, grandezas como energia, momento linear, momento angular, e outras, podem assumir valores discretizados. Além disso, os objetos possuem simultaneamente características ondulatórias e corpusculares (dualidade onda-partícula).
- Dependendo das circunstâncias experimentais, a radiação parece ter um caráter ondulatório ou de partícula (fóton).
- Louis De Broglie (1892-1987) afirmava que se a energia radiante pudesse se comportar, sob condições apropriadas, como um feixe de partículas, a matéria, sob condições apropriadas, poderia possivelmente mostrar propriedades de uma onda.
- O caráter de partícula ou de onda de uma entidade física é complementar e não pode ser exibido ao mesmo tempo (princípio da complementaridade de Bohr).
- O físico alemão Werner Heisenberg (1901-1976) concluiu que a natureza dual da matéria coloca uma limitação fundamental em como podemos determinar precisamente a posição e o momento de qualquer objeto.
- A limitação torna-se importante apenas quando trabalhamos com matéria em nível subatômico.
- O princípio da incerteza de Heisenberg, quando aplicado aos elétrons em um átomo, afirma que é inerentemente impossível nós sabermos de maneira simultânea tanto o exato momento do elétron quanto sua posição específica no espaço (EISBERG, 1979).
- A primeira formulação sólida da mecânica quântica foi denominada mecânica matricial.
- A formulação ondulatória de Schrödinger foi criada em 1926 (Nobel de Física em 1933). Essa formulação tem como base uma equação que descreve como o estado quântico de um sistema físico evolui no tempo.

- A mecânica quântica e sua rigorosa formulação matemática é devida a Paul Dirac, David Hilbert (matemático alemão), Erwin Schrödinger, Albert Einstein e outros.
- Na mecânica quântica, a noção de que todas as variáveis dinâmicas do sistema possuem valores bem definidos em cada instante de tempo é descartada.
- Os postulados da mecânica quântica são fundamentados em verdades que não são provadas.
- Na mecânica quântica, um espaço físico é representado por um vetor de estado em um espaço vetorial complexo. Segundo Paul Dirac, esse vetor pode ser dado pelo ket  $|\alpha\rangle$  (representado por uma matriz coluna).
- O estado quântico, quando especificado, pode ser descrito por um vetor de estado. Vetores de estado quântico têm um significado físico, onde as probabilidades podem ser calculadas a partir deles.
- Postula-se que o ket contém a informação sobre o estado físico do sistema em estudo.

## **2 UM BREVE RESUMO SOBRE INTERFERÊNCIA**

- A interferência é representada pela superposição de duas ou mais ondas em uma região do espaço.
- A interferência construtiva ocorre quando há um reforço das ondas, e a resultante é maior que a amplitude das componentes individuais.
- A interferência destrutiva ocorre quando há um cancelamento em cada ponto e a amplitude resultante é próximo de zero.
- A crista é definida como a altura da onda em relação à linha horizontal (com amplitude  $a$ ) e o vale é a defasagem da onda em relação à linha horizontal.

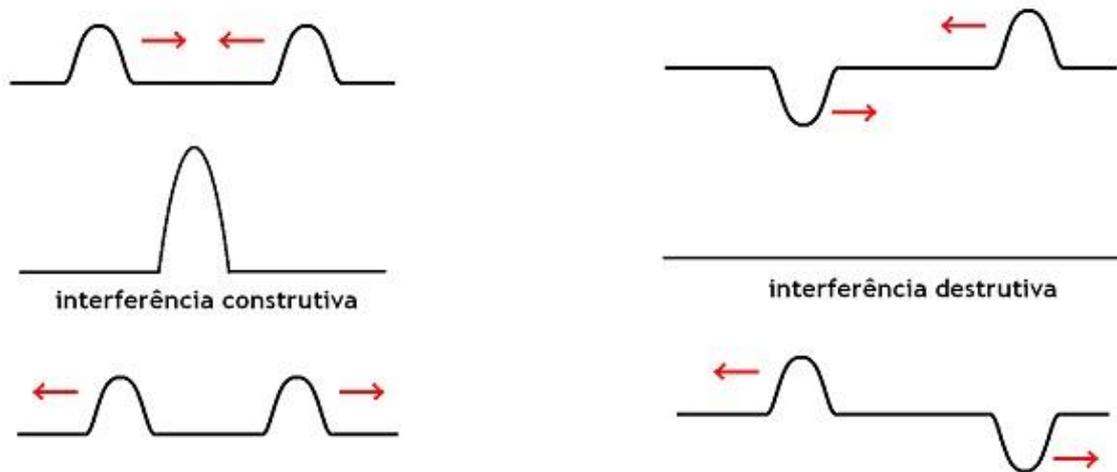
Figura 1 – Representação da propagação de uma onda.



Fonte: “adaptado de” Ramalho (2007, p. 422).

- A interferência construtiva é quando um vale de uma onda encontra outro vale, assim pode ocorrer a duplicação de sua amplitude, o mesmo ocorre quando uma crista de uma onda coincide com outra.

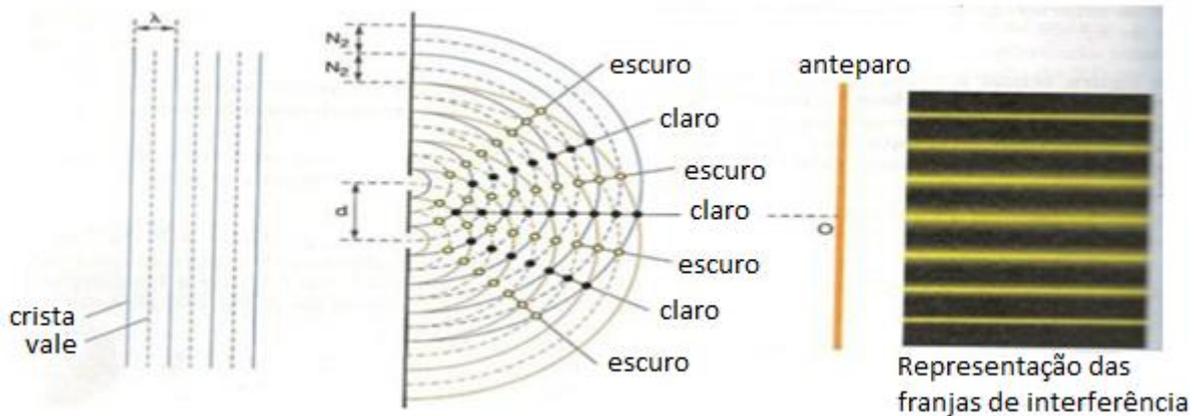
Figura 2 - Ilustração da superposição de ondas construtivas e destrutivas.



Fonte: “adaptado de” Ramalho (2007, p. 450).

- Nas franjas claras, ocorre interferência construtiva e existe um reforço das ondas.
- Nas franjas escuras, as ondas se anulam e ocorre interferência destrutivamente.
- Nas áreas adjacentes às franjas claras e escuras, a intensidade da luz varia gradualmente entre as franjas.

Figura 3 - Ilustração das interferências, franjas claras e escuras no anteparo.

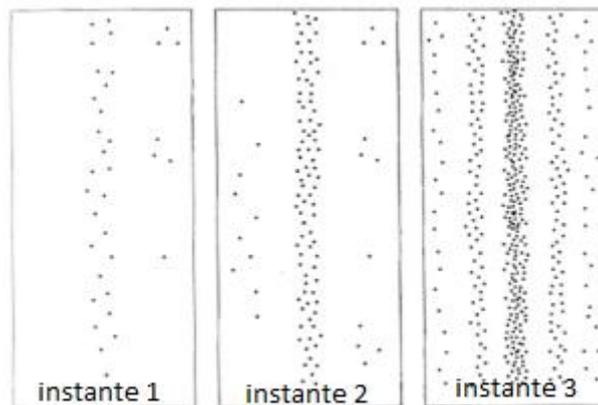


Fonte: "adaptado de" Benigno e Xavier (2016).

- Em uma visão mais direcionada ao interferômetro, a interferência descreve o fóton seguindo por duas trajetórias distintas simultaneamente como se estivesse viajando pelos dois caminhos ao mesmo.
- No modelo quântico, o fóton é uma partícula de luz indivisível que pode ser refletido ou transmitido em um espelho semitransparente.
- No jargão da mecânica quântica, dizemos que o fóton está em um estado de superposição quântica.
- O fóton é um objeto quântico que pode percorrer dois caminhos simultaneamente.
- O interferômetro de Mach-Zehnder é um arranjo experimental óptico inventado por Ludwig Mach (1868-1949), filho do ilustre teórico Ernest Mach, e pelo físico suíço Ludwig Zehnder (1854-1949), por volta dos anos 1890.
- Esse interferômetro foi proposto de maneira independente por Ludwig Zehnder em 1891 e Ludwig Mach em 1892.
- O interferômetro é um experimento que faz uso do fenômeno de interferência entre as ondas de luz, ou um meio de comprovar que a luz possui propriedades ondulatórias.

- Interferômetros são aparelhos que dividem um feixe de luz em dois, reunindo os dois feixes resultantes depois que cada um deles percorre um dos caminhos do equipamento.
- O experimento da dupla fenda, realizado por Thomas Young em 1801, pode ser considerado o primeiro interferômetro.
- Neste experimento, a fonte pode emitir um fóton de cada vez. A figura de interferência é obtida numa chapa fotográfica durante um longo tempo.

Figura 4 - Os fótons com as respectivas interferências.



Fonte: "adaptado de" Müller, (2002, p. 204).

- As franjas claras das figuras de interferência representam as regiões que os fótons têm maior probabilidade de acertar; as escuras representam aquelas que os fótons têm menor probabilidade de atingir.
- Essas regiões são determinadas pelos diferentes fatos que intervêm na experiência, como a frequência de radiação, a largura das fendas, a distância entre elas e a distância das fendas ao anteparo.
- A determinação dessas regiões é feita através de uma configuração estatística mais provável, bem determinada matematicamente.
- As franjas claras são determinadas quando os fótons colapsam na respectiva região.

- Nas vitrines das lojas observamos um exemplo de espelho semitransparente, pois vemos o interior da loja bem como uma reflexão parcial da nossa imagem.
- Interferômetros também operam em partículas corpusculares, pois a onda associada à partícula produz interferência.
- O interferômetro possui uma sensibilidade tanto maior quanto menor for o comprimento de onda do objeto quântico.
- Interferômetros podem ser extremamente precisos, úteis para navegação interestelar, para a medida de constantes fundamentais e para aplicações em prospecção geológica e mineral.
- Por exemplo, esse tipo de interferômetro permitiria a medida do campo gravitacional na superfície da Terra com precisão suficiente para detectar poços de petróleo.

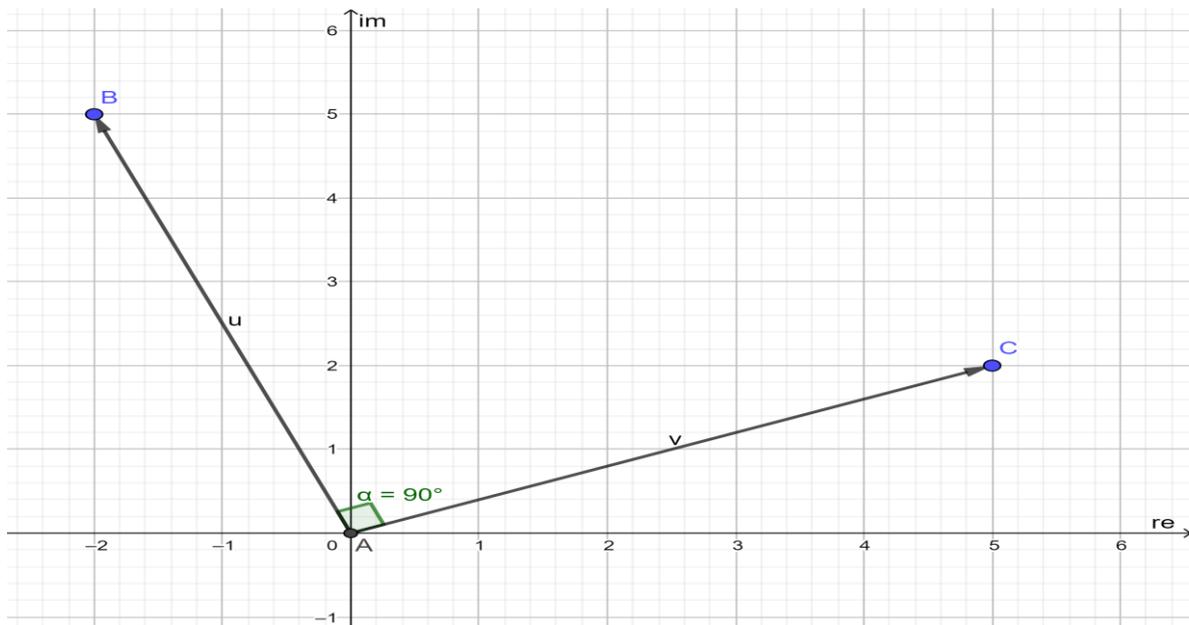
### 3 UMA REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

- Um número complexo pode ser definido como um vetor que contém um par ordenado de valores no plano dos números complexos (a parte real e a parte imaginária).
- Assim, um número complexo, que chamamos de  $z$ , é representado por  $z = a + bi$ , chamamos  $a$  de parte real, e  $b$  de parte imaginária. Esta notação é chamada de forma algébrica.
- Quando nos deparamos com  $x = \sqrt{-1}$ , como não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos números reais, convencionou-se  $i^2 = -1$  para representar esse número com raiz negativa. O número  $i$  é representado como unidade imaginária.
- Os números complexos são úteis para realizar operações geométricas com vetores.

- Multiplicar por  $i$  corresponde a girar  $90^\circ$ , no sentido positivo ao redor da origem, a imagem do complexo pelo qual se multiplica  $i$ .
- Seja  $u = v \cdot i$ , sendo  $v = 5 + 2i$ , então

$$u = (5 + 2i)i = 5i + 2i^2 = -2 + 5i.$$

Figura 5 – Demonstração gráfica correspondente ao giro do vetor.



- O leitor interessado em aprender mais sobre números complexos pode consultar a referência do livro Giovane, Bonjorno (2001).

#### 4 UMA BREVE REVISÃO DE MATRIZES

- Nas matrizes, cada número é chamado elemento da matriz, as filas horizontais chamadas de linhas ( $m$ ) e as verticais de colunas ( $n$ ).
- Uma matriz  $A$  do tipo  $m \times n$  é representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Matriz linha: é toda matriz do tipo  $1 \times n$ , isto é, com uma única linha.

$$A = (4 \quad 7 \quad -3 \quad 1)_{1 \times 4}$$

- Matriz coluna: É toda matriz do tipo  $n \times 1$ , isto é, com uma única coluna.

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz quadrada: É toda matriz do tipo  $n \times n$ , isto é, com o mesmo número de linhas e colunas. Neste caso, dizemos que a matriz é de ordem  $n$ .

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \pi & \sqrt{3} \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

- Seja uma matriz quadrada de ordem  $n$ .
- Exemplo de adição de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Exemplo de multiplicação de uma matriz por um número real:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Exemplo de multiplicação de matrizes, demonstrando que uma matriz  $A \cdot B \neq B \cdot A$ :

- Sendo as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$  e  $D = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ , temos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & 4+12 \\ 4+3 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 8 & 3 + 2 \\ 6 + 16 & 9 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + i \cdot i & i + i \\ 2i + 2i & i \cdot i + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + i^2 & 2i \\ 4i & i^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 1 \end{pmatrix}.$$

## 5 ESPAÇOS VETORIAIS NA MECÂNICA QUÂNTICA

- Na formulação abstrata da mecânica quântica dizemos que  $|\psi\rangle$  é um vetor num espaço de Hilbert.
- O nome "vetor" é devido à aparência com as quantidades que se comportam como flechas no plano ou no espaço físico. A propósito, os espaços vetoriais da mecânica quântica são, geralmente, de dimensões infinitas, e são então chamados de espaços de Hilbert. David Hilbert foi um Matemático alemão (1862-1943).
- Em mecânica quântica, representamos geralmente os vetores pelos símbolos bra  $\langle |$  ou ket  $| \rangle$ , inventados por Paul Dirac.
- A seguir veremos as propriedades de um espaço vetorial satisfeitas por seus elementos, chamados de vetores.
- Vetores podem ser adicionados e sua soma é também um vetor,

$$|x\rangle + |y\rangle = |z\rangle.$$

- A adição é comutativa,

$$|x\rangle + |y\rangle = |y\rangle + |x\rangle.$$

- A adição é associativa,

$$(|x\rangle + |y\rangle) + |z\rangle = |x\rangle + (|y\rangle + |z\rangle).$$

- Para cada vetor  $|x\rangle$  há um vetor negativo  $|y\rangle$  (ou  $| - x\rangle$ ), tal que

$$|x\rangle + |y\rangle = 0.$$

- Vetores podem ser multiplicados por escalares  $a$ ,  $b$ . O resultado também é um vetor. Se  $|x\rangle$  for um vetor, então  $a|x\rangle$  também é um vetor.
- Os escalares podem ser números reais ou complexos. No espaço vetorial Hilbert da mecânica quântica, os escalares são números complexos.
- A multiplicação por escalar é associativa,

$$a(b|x\rangle) = (ab)|x\rangle.$$

- Vale a lei distributiva,

$$(a + b)|x\rangle = a|x\rangle + b|x\rangle.$$

- Na Mecânica Quântica, o estado de um sistema físico será representado por um vetor abstrato pertencente a um espaço vetorial complexo. Veremos, a seguir, mais detalhes das operações com os vetores das matrizes colunas (NOVAIS, 2016).
- Vamos considerar os vetores matrizes colunas  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ ,

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Realizando a adição entre dois vetores,  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ , e a multiplicação por um escalar  $\alpha \in \mathbb{C}$ , temos

$$|a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \alpha|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}.$$

- É instantâneo verificar que o conjunto das matrizes colunas acima definido constitui um espaço vetorial sobre o conjunto dos números complexos.
- O postulado fundamental da mecânica quântica diz que o estado de um sistema quântico é matematicamente representado por um ket normalizado  $|\alpha\rangle$ .
- Superposição: Um fóton em superposição pode ser descrito matematicamente por  $|\alpha\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$ , onde  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  representam, neste caso, diferentes trajetórias.
- $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  são conhecidos como base ortonormal e são representados por

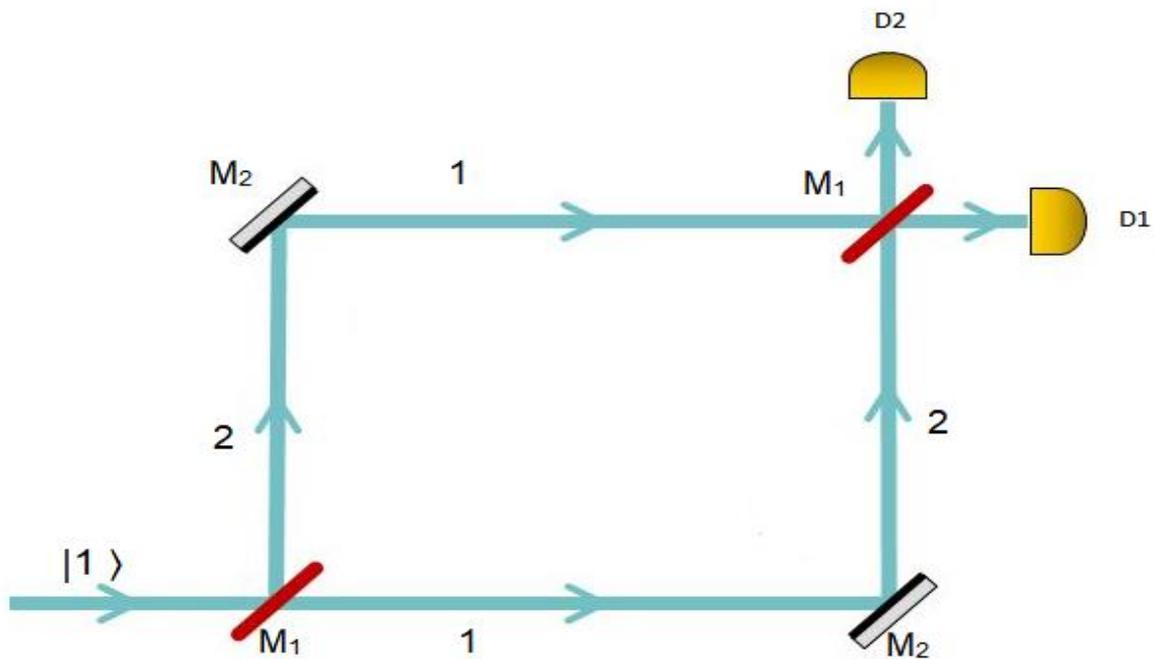
$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Uma base ortonormal é constituída por vetores ortogonais com módulo 1.
- O primeiro espelho semitransparente posiciona o fóton em uma superposição de dois estados,  $|1\rangle$  que representa o caminho 1, e  $|2\rangle$  que representa o caminho 2.

## 6 MEDIÇÕES LIVRES DE INTERAÇÃO EM UM INTERFERÔMETRO TIPO MACH-ZEHNDER (SEM OBJETO)

- A Figura 6 ilustra o interferômetro tipo Mach-Zehnder.
- $M_1$  = espelhos semi-transparentes (refletem e transmitem 50%).
- $M_2$  = espelhos (refletem 100%).
- $|1\rangle$  = estado do fóton movendo-se para a direita.
- $|2\rangle$  = estado de um fóton movendo-se para cima.

Figura 6 – Interferômetro sem objeto obstruindo.



Fonte: “adaptado de” Müller, (2002, p. 203).

- A mecânica quântica opera com cálculo de matrizes.
- O fóton entra no Interferômetro tipo Mach-Zehnder devidamente alinhado.
- Há dois detectores no interferômetro,  $D_1$  e  $D_2$ .
- A interferência é construtiva no detector  $D_1$  e destrutiva no detector  $D_2$ .
- No estudo do comportamento ondulatório da luz, os detectores  $D_1$  e  $D_2$  são substituídos por anteparos. No estudo do comportamento corpuscular, os detectores são essencialmente contadores de fótons.
- É interessante perceber que o efeito básico deste experimento está relacionado à fase da onda, ou seja, o primeiro semiespelho sempre deixa passar metade da luz e reflete a outra metade (ELITZUR, 1993).
- A matriz referente à operação do espelho semitransparente  $M_1$  no fóton representa a transformação de uma partícula que estava no estado  $|1\rangle$  para uma superposição dos estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  e vale

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- Os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  são representados pelas seguintes matrizes coluna:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- Este experimento teórico será realizado considerando o estado inicial do fóton dado por  $|1\rangle$ .
- Aplicando a matriz do espelho semitransparente  $M_1$  no estado do fóton  $|1\rangle$ , significa depois que o fóton passa do primeiro espelho semitransparente  $M_1$ , obtemos

$$M_1|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- Expandindo o resultado da forma matricial da equação (4) por meio das matrizes colunas dos estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , argumentos (2) e (3), obtém-se a soma dos kets

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

- Colocando em evidência  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , observamos que nessa expressão há os estados dos kets  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , equações (2) e (3), sendo o estado  $|2\rangle$  multiplicado pelo número complexo  $i$ . Assim, chegamos na superposição,

$$|1\rangle \xrightarrow{M_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle + i |2\rangle \}. \quad (5)$$

- A equação (5) significa a superposição do estado do fóton  $|1\rangle$ , no primeiro espelho semitransparente  $M_1$ .
- Aplicando o primeiro espelho semitransparente  $M_1$  no estado do fóton  $|2\rangle$ , temos

$$M_1|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

- O estado  $|2\rangle$  se transforma na seguinte superposição:

$$|2\rangle \xrightarrow{M_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ i|1\rangle + |2\rangle \}. \quad (7)$$

- A diferença entre a equação (5) e (7) é o número complexo multiplicado pelo estado do fóton, que representa a passagem do fóton em cada “braço” do interferômetro depois que ele é refletido e transmitido pelo primeiro espelho semitransparente.
- A matriz que opera no espelho de reflexão total  $M_2$  (100%) é dada por

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

- Aplicando a matriz que opera no espelho de reflexão total  $M_2$  no resultado do argumento (4), obtemos

$$M_2 \cdot M_1|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (9)$$

- Isso significa que a superposição do estado  $|1\rangle$ , após o primeiro espelho semitransparente e o espelho de reflexão total, é

$$|1\rangle \xrightarrow{M_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle + i|2\rangle \} \xrightarrow{M_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ -|1\rangle + i|2\rangle \} \quad (10)$$

- Depois que o estado inicial do fóton, dado por  $|1\rangle$ , passa pelos dois espelhos (o primeiro espelho semitransparente  $M_1$  e o espelho de reflexão total  $M_2$ ), aplica-se finalmente o segundo espelho semitransparente  $M_1$  no resultado do argumento (9), observando que a matriz do primeiro e segundo espelhos semitransparentes são iguais, temos o resultado a seguir,

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Assim, teremos o resultado do trajeto do fóton em todo o processo do interferômetro, dado por

$$|1\rangle \xrightarrow{M_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle + i |2\rangle \} \xrightarrow{M_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ -|1\rangle + i |2\rangle \} \xrightarrow{M_1} -|1\rangle. \quad (11)$$

- A equação (11) representa a superposição do estado do fóton  $|1\rangle$  desde o primeiro espelho semitransparente até o colapso no detector  $D_1$ .
- Pela forma como o experimento foi realizado, depois que o fóton passa por todos os espelhos, teremos o estado  $-|1\rangle$ , ou seja, só vai ter fóton para a direita e somente o detector 1 vai clicar (colapsar).
- O sinal negativo não afeta o resultado, porque a amplitude quando é calculada a sua probabilidade é elevada ao quadrado, então é só um fator de fase da onda e não altera a probabilidade.
- Colapsar significa entre as várias probabilidades de estado que o objeto tem, somente um é medido.
- Quando uma onda quântica colapsa, por exemplo, ela se manifesta como partícula.
- Multiplicando as matrizes que operam no interferômetro, obtemos:

$$N = M_1 \cdot M_2 \cdot M_1,$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix},$$

$$N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - 1 & i - i \\ -i + i & -1 - 1 \end{pmatrix},$$

$$N = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N|1\rangle = -|1\rangle. \tag{12}$$

- A equação (12) faz a combinação de todos os espelhos de modo que a matriz identidade é negativa.
- Aplicando N em  $|1\rangle$ , temos que

$|1\rangle$  é o estado inicial antes de passar pelos espelhos,

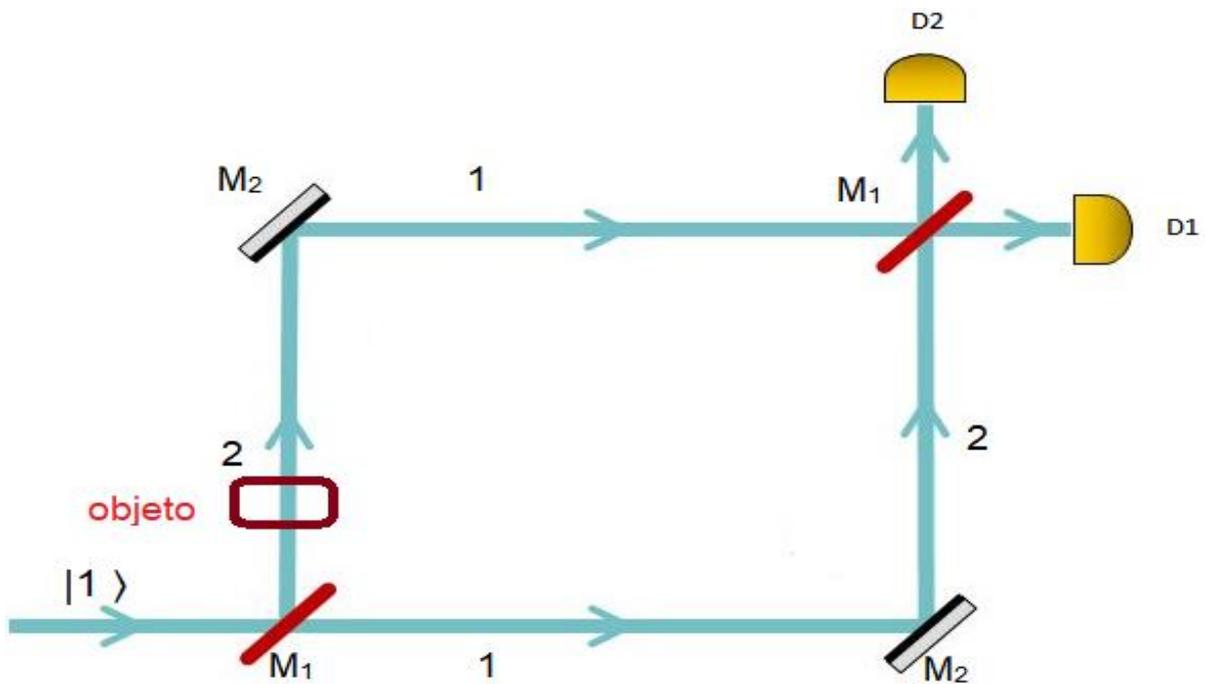
$-|1\rangle$  é o estado final após passar pelos espelhos.

## 7 MEDIÇÕES LIVRES DE INTERAÇÃO, MACH-ZEHNDER

### COM OBJETO (CLÁSSICO)

- Vamos considerar os cálculos do argumento (1) até o (11), agora com um objeto clássico obstruindo um dos caminhos.

Figura 7 - Interferômetro com objeto clássico obstruindo um dos caminhos.



Fonte: "adaptado de" Müller, (2002, p. 203).

- Após o espelho semitransparente  $M_1$ , as equações (4) e (5) podem ser reescritas como

$$M_1 |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$|1\rangle \xrightarrow{M_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle + i |2\rangle \}. \quad (14)$$

- Quando o estado  $|2\rangle$  é espalho,  $|2\rangle \rightarrow |\text{espalhado}\rangle$ , significa que existe um objeto obstruindo um dos caminhos do fóton.
- A atuação de  $M_2$  no estado  $|1\rangle$  resulta em

$$M_2|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- O argumento (15) representa a superposição do estado  $|1\rangle$  após o espelho de reflexão total  $M_2$ ,

$$|1\rangle \xrightarrow{M_2} i|2\rangle. \quad (15)$$

- Após o espelho de reflexão total  $M_2$  (100%), temos as seguintes superposições:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\xrightarrow{M_2} \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1\rangle + i|2\rangle\} \frac{1}{\sqrt{2}}\{i|2\rangle + i|\text{espalhado}\rangle\} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}\{|2\rangle + |\text{espalhado}\rangle\} \end{aligned} \quad (16)$$

- Aplicando a matriz do primeiro espelho semitransparente  $M_1$  no estado  $|2\rangle$ , ele se transforma em

$$M_1|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$|2\rangle \xrightarrow{M_1} \frac{1}{\sqrt{2}}\{i|1\rangle + |2\rangle\}. \quad (18)$$

- Os argumentos (6) e (7) estão reescritos nas equações (17) e (18).
- Aplicando a propriedade distributiva na equação (18) e substituindo o resultado do estado do fóton  $|2\rangle$  da mesma no argumento (16), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{i}{\sqrt{2}}\{|2\rangle + |\text{espalhado}\rangle\} &\rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + |\text{espalhado}\rangle\right\} \\ &= -\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{2}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\text{espalhado}\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

- Resumindo, temos as seguintes operações de superposições, descritas nos itens a seguir.
- O estado  $|1\rangle$ , operando no primeiro espelho semitransparente  $M_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1\rangle + i|2\rangle\}$ , em seguida atuando no espelho de reflexão total  $M_2 \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}}\{|2\rangle + i|\text{espalhado}\rangle\}$ , e finalmente operando no segundo espelho semitransparente  $M_1$ , obtemos como resultado final

$$M_1 \rightarrow -\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{2}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\text{espalhado}\rangle.$$

- Elevando ao quadrado as amplitudes de cada estado da equação (19), obtemos as respectivas probabilidades dos estados  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|\text{espalhado}\rangle$ .
- A probabilidade do fóton colapsar no estado  $|1\rangle$  é dada por

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{4} (25\%).$$

- A probabilidade do fóton colapsar no estado  $|2\rangle$  é dada por

$$P_2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$|2\rangle \rightarrow \frac{1}{4} (25\%).$$

- A probabilidade do fóton ser espalhado é dada por

$$P_e = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$|\text{espalhado}\rangle \rightarrow \frac{1}{2} (50\%).$$

- Este interferômetro é arranjado de tal maneira que um dos caminhos do fóton passa pelo local onde o objeto clássico (Fig. 7) está presente. Um único fóton passa pelos “braços” do interferômetro. Existem três resultados possíveis para essa medição: (1) clicar no detector  $D_1$ , (2) clicar no detector  $D_2$ , (3) espalhar no objeto clássico que obstrui um dos caminhos.
- Observa-se pela probabilidade  $P_2$  que  $D_2$  clica, isto é, colapsa em  $|2\rangle$ . Isso significa que podemos garantir que existe um objeto clássico obstruindo um dos caminhos, mesmo sem interagir com ele, pois no caso sem o objeto,  $D_2$  nunca clicava.
- De acordo com a realização dos cálculos desse interferômetro (com objeto clássico obstruindo um dos caminhos), observa-se que o fóton em um dos caminhos foi espalhado pela obstrução do objeto clássico e nenhum detector irá clicar neste caso.

## REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Interamericana, 1980. 92 p.

BEATRIZ, A.M. A. **Curso de Física**. 3 ed. São Paulo: Saraiva, v. 3, 2010. 218 p.

EISBERG, R.; RESNICK, R. **Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Rio de Janeiro: Elsevier Editora, 1979, 97 p.

ELITZUR, Avshalom.; VAIDMAN Lev. Quantum Mechanical Interaction-Free Measurements. **Foundations of physics**, v. 23, p. 987,1993.

GUALTER; NEWTON; HELOU. **Física**. 3 ed. São Paulo: Saraiva, v. 3, 2016. 250–251 p.

GIOVANNI; BONJORNO. **Matemática uma nova abordagem**. São Paulo: Editora FTD, v.3, 2001. 148 p.

MULLER, T. Teaching Quantum Mechanics on an introductory level. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 3, p. 200–209, 2002.

NOVAIS, STUDART. **Mecânica quântica básica**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. 106 p.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Atualização do currículo de física na escola de nível médio: um estudo dessa problemática na perspectiva de uma experiência em sala de aula e da formação inicial de professores. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 18, n. 2, p. 135–151, 2001.

RAMALHO, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. d. T. **Os Fundamentos da Física**. 7. ed.: São Paulo: Moderna, v.2, 2007, 422, 450 p.

TERRAZZAN, E. A. A inserção da física moderna e contemporânea no ensino de física na escola de 2º grau. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 9, n. 3, p. 209–214, 1992.

TORRES, C. M. A. et al. **Física Ciência e Tecnologia**. 4 ed. São Paulo: Editora Moderna, v.3, 2016. 206 p.

## APÊNDICE C

### AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Nesta seção apresentamos uma avaliação que representa no processo de ensino e aprendizagem um elemento importante na análise dos tópicos de Física Quântica trabalhados através desta sequência didática. A avaliação mostra o nível do trabalho do professor e também o aprendizado do aluno. Neste produto educacional feito em forma de sequência didática, esta seção será utilizada com aspectos qualitativos e quantitativos.

### QUESTÕES

- 1) Por que utilizamos números complexos na mecânica quântica?
- 2) Por que a mecânica quântica não pode ser completamente derivada a partir da física clássica?
- 3) Qual o significado do símbolo matemático  $|\text{ket}\rangle$ ?
- 4) Se o fóton é uma partícula de luz indivisível, o que ocorre quando esta passa pelo primeiro espelho semitransparente.
- 5) Quando o estado do fóton colapsa em um dos detectores no interferômetro de Mach-Zehnder, qual seu significado?
- 6) Qual o significado físico das medições livres de interação no interferômetro de Mach-Zehnder, quando não há objeto e quando há objeto obstruindo um dos caminhos do fóton?
- 7) De acordo com essa superposição proposta  $-\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle$ , qual a probabilidade do fóton colapsar nos estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ .
- 8) Em um interferômetro onde existe um objeto obstruindo um dos caminhos, calcule a probabilidade do estado espalhado, considerando que o estado do sistema é

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|\text{espalhado}\rangle$$

9) Quando o fóton representado por  $|1\rangle$ , no experimento teórico das medições livres de interação sem objeto, passa por todos os espelhos e colapsa no detector  $D_1$ , que tipo de interferência podemos observar?

- a) Interferência construtiva.
- b) interferência destrutiva.
- c) interferência livre.
- d) interferência de medida.
- e) estão corretas as alternativas a, b, c e d.

10) Qual tipo de interferência ocorre no detector  $D_2$  seguindo o enunciado da questão 9?

11) Para praticar e entender melhor o que ocorre nos cálculos matemáticos realizados quando o estado do fóton é  $|1\rangle$ , realize os cálculos considerando que o estado do fóton inicial fosse  $|2\rangle$ .