Olimpiada Iberoamericana de Física

OIbF virtual 2020

Prueba teórico-experimental

6 de diciembre de 2020

Problema 1. Un modelo de catapulta

Un modelo simple de catapulta consiste en una palanca, puede verse en naranja en la figura 1. Esta palanca es una varilla rígida homogénea de masa M y de longitud $L+l$, que gira alrededor del punto de pivote O (ver figura 1 y 2), de tal forma que uno de sus extremos está a una distancia L del punto O (este último ubicado a una altura h respecto al suelo), y el otro a l del mismo, con $L > l$.

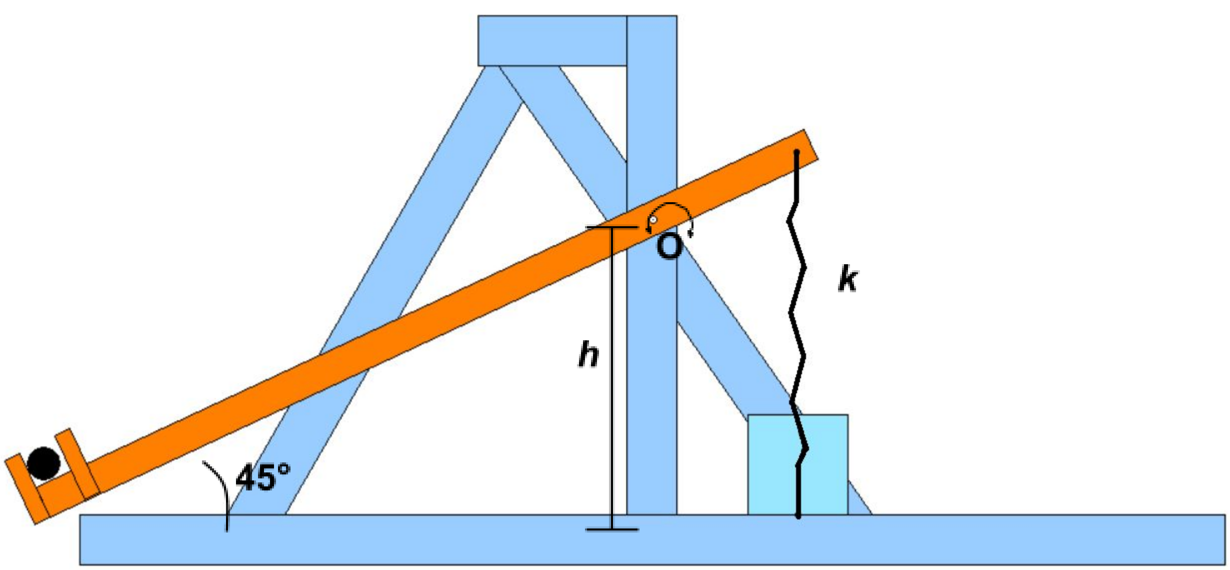


Figura 1.

Las dimensiones de la palanca son tales que cuando el extremo del brazo mayor alcanza el suelo, esta forma un ángulo de $45°$ con la horizontal. En el brazo mayor se coloca el proyectil de masa m a lanzar, para el desarrollo de este problema considérese un objeto puntual. Además, el extremo del brazo menor está unido a un resorte de longitud natural l_0 $(l_0 < l)$ y constante elástica k (cuando el brazo mayor alcanza el suelo, como en la figura 1, el resorte se encuentra elongado y en posición vertical).

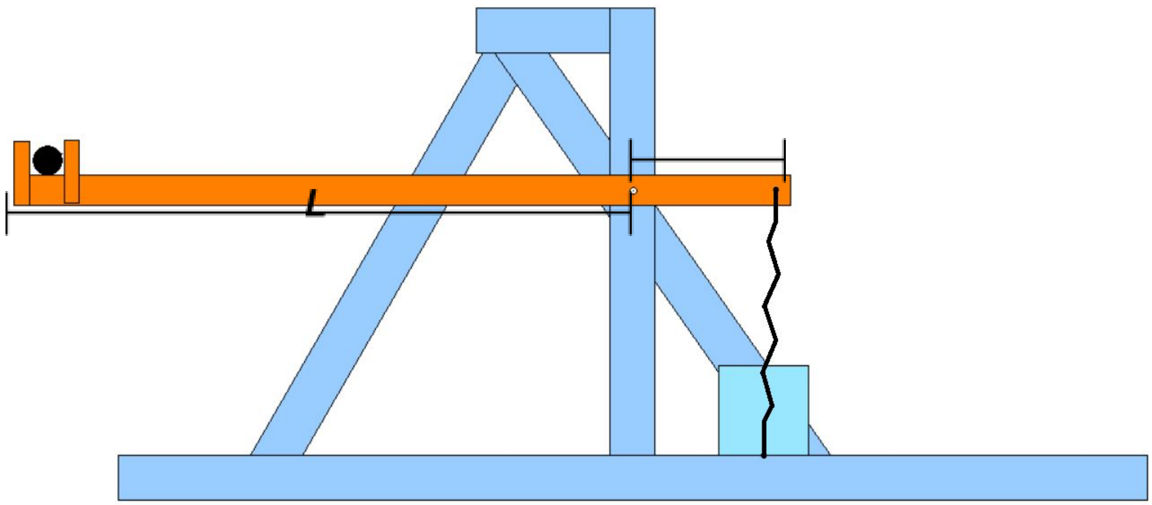


Figura 2.

Además, para el funcionamiento de este modelo, se utiliza un obstáculo que frena el giro de la palanca cuando ésta forma un ángulo de $45°$ con la vertical (ver figura 3). A partir de ese instante el proyectil es lanzado al aire. Para el análisis del funcionamiento de este modelo, se considera que no hay fricción en el eje de la palanca, así como también se desprecia el rozamiento con el aire.

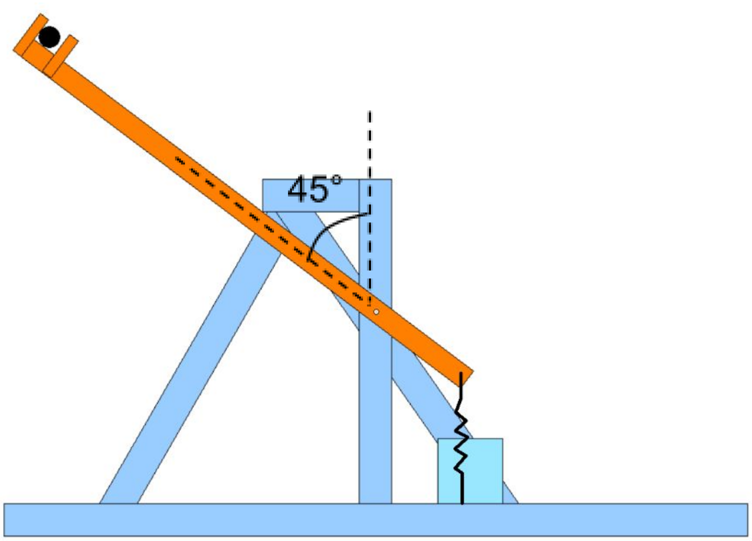


Figura 3.

La posición del extremo inferior del resorte se puede fijar a diferentes alturas ***h'*** para poder ajustar el lanzamiento hacia un objetivo (ver figura 4).

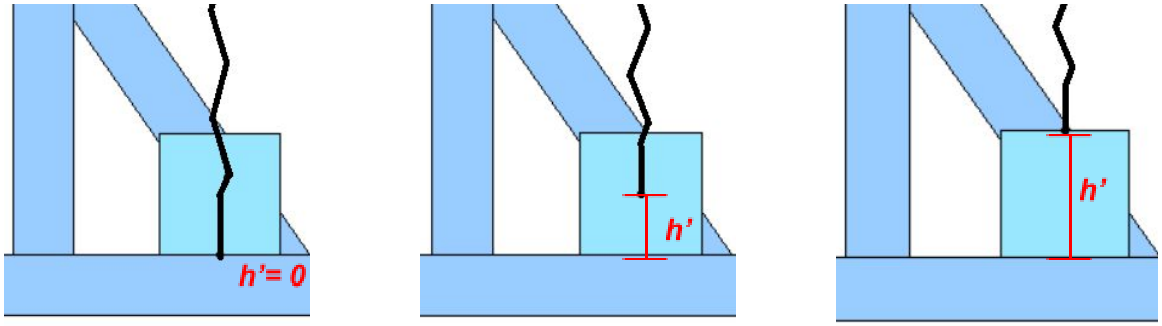


Figura 4. Se muestran diferentes alturas de ajuste de la altura *h'* del extremo inferior del resorte.

De los literales del a) al e) dejar expresado $sen\,45°$ y $cos\,45°$ como tal, si los necesita; NO sustituya por su valor numérico.

a. Encuentre una expresión para el momento de inercia I de la palanca en el eje perpendicular a ella y que pasa por O, en función de sus dimensiones y masa. Para ello suponga que las piezas que evitan que el proyectil salga eyectado antes de llegar a la posición final, son de masa despreciable. **[1 punto]**

   Ayuda: El momento de inercia para una varilla girando alrededor de eje perpendicular a ella que pasa en por su centro de masa es:
   $$I_{cm} = \tfrac{1}{12}ML^2$$, donde L es la longitud total de la varilla

Para los siguientes literales, si involucran el momento de inercia, dejarlo expresado como I.

Cuando la catapulta se carga con un proyectil de masa m, y ésta se pone en funcionamiento, ajustando el extremo bajo del resorte a una altura h' del suelo:

b. Determinar la expresión para el cambio de energía potencial, en función de las masas m y M, de la altura h, la longitud del brazo menor de la palanca, la constante elástica k y longitud natural l_0 del resorte, así como también de la altura h' a la cual se ajusta el resorte. **[2.5 puntos]**

c. Determine la magnitud de la velocidad de salida del proyectil. **[2.5 puntos]**

d. Según las expresiones anteriores, ¿cuál es la expresión para la altura máxima $h'_{máx}$ a la que se ajusta el resorte a partir de la cual dicho proyectil podrá salir disparado? **[2 puntos]**

e. Si se desea impactar a un punto que está a una altura $2h$ respecto al suelo. Escriba la expresión para la distancia horizontal de dicho proyectil hasta que encuentra el objetivo, utilizando la expresión encontrada en c. **[2 puntos]**

Problema 2. Gotas eléctricas.

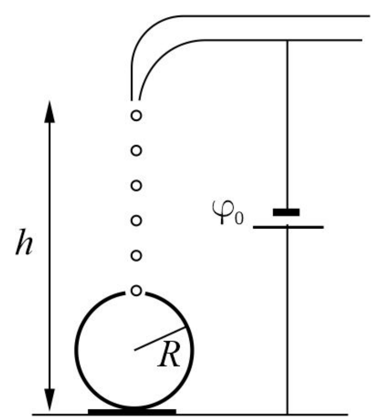
1.- Un sistema deja caer continuamente gotas esféricas de un líquido, idénticas de radio r y potencial eléctrico φ_0 dentro de una esfera hueca metálica previamente descargada de paredes delgadas y radio R. Las gotas se liberan desde una altura h medida desde el piso tal que $h > 2R$. La esfera está aislada eléctricamente del piso. Considere las gotas conductoras. Se desprecia la resistencia del aire. Considere que la distribución de la carga en la esfera de radio R permanece uniforme y desprecie los efectos del agujero.

a) Halle el potencial eléctrico máximo que puede alcanzar la esfera. Considere dos posibilidades: que la esfera se llene completamente, o que no alcance a llenarse. **[7 puntos]**

b) Para los datos siguientes determine el potencial eléctrico que alcanza la esfera de radio R: el líquido es agua, r = 0,50 mm, $\varphi_0 = 150\ V$, R = 5,0 cm y h = 25,0 cm. **[2 puntos]**

c) Para el resultado del literal b) determine si hay ruptura del dieléctrico aire, la cual ocurre cuando el campo eléctrico alcanza el valor 3,00 kV/mm. **[1 punto]**

La constante dieléctrica del vacío es $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F/m$, la densidad del agua $\rho = 1,00 \times 10^3 kg/m^3$, y la aceleración gravitatoria $g = 9,81\ m/s^2$.

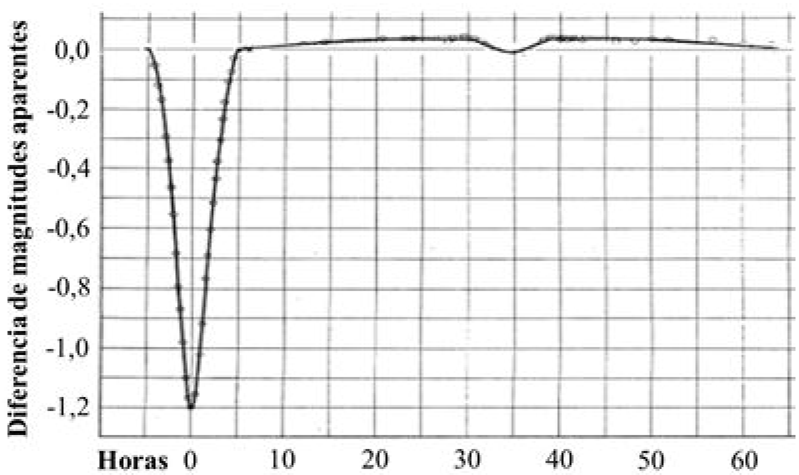


Problema 3. El brillo de las estrellas: fotometría fotoeléctrica.

Uno de los problemas más importantes en astronomía es la medida del brillo de los astros. De ello se encarga la fotometría. Durante mucho tiempo la fotometría fue muy imprecisa, pues se hacía mediante estimaciones visuales o por medios fotográficos. Pero a principios del siglo XX el astrónomo Joel Stebbins, en el Observatorio de la Universidad de Illinois, con la colaboración del físico Jakob Kunz, empezó a utilizar células fotoeléctricas en los detectores de los telescopios. Así empezó la era de la fotometría fotoeléctrica, que se convirtió en la técnica estándar hasta la llegada de las modernas cámaras CCD.

En este problema vamos a considerar el montaje básico de Stebbins y Kunz para estudiar las *estrellas de brillo variable*. Se utiliza un telescopio refractor cuyo objetivo tiene **31 cm** de diámetro y una distancia focal de **4,57 m**. El fotómetro consiste en una celda fotoeléctrica cuyo cátodo metálico produce una corriente de electrones cuando es iluminado. El cátodo es de rubidio, cuya función de trabajo es **2,261 eV**. El fotómetro se acopla al telescopio de forma que el cátodo queda situado en el plano focal del objetivo. La corriente eléctrica se mide mediante la deflexión de la aguja de un electrómetro.

Algol (o Beta Persei), en la constelación de Perseo a **90 años luz** de la Tierra, es una de las primeras estrellas variables conocidas. En realidad, es un sistema de tres estrellas A, B y C muy juntas. Algol A y Algol B orbitan una en torno a la otra formando lo que se llama una *estrella binaria eclipsante*. Como la Tierra se halla en su plano orbital, Algol B (la más débil, pero la más grande) eclipsa a Algol A (más brillante y más pequeña) al pasar por delante cada período orbital. En consecuencia, la cantidad de luz que llega a la Tierra decrece temporalmente. La gráfica muestra la *curva de luz* que midió Stebbins.



En astronomía la *luminosidad*, L, es la potencia emitida por una estrella en todas direcciones. El *brillo*, B, es la potencia por unidad de área que llega a la Tierra. La *curva de luz* es la diferencia $m_1 - m_2 = 2,5 \cdot log_{10}(B_2/B_1)$ en función del tiempo, donde B_1 es el brillo máximo de Algol y B_2 es el brillo en cualquier otro momento; m_1 y m_2 se llaman *magnitudes aparentes*.

DATOS

Constante de Wien = 2897,6 μm · K
Constante de Planck = $6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s
Carga del electrón = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Velocidad de la luz = $3 \cdot 10^{8}$ m/s^{2}
Luminosidad del Sol = $3{,}828 \cdot 10^{26}$ W

Estrella	Temperatura (K)	Luminosidad (*)	Radio (*)
Algol A	13000	182	2,7
Algol B	4500	6,9	3,5
Algol C	7500	10	1,7

* En unidades solares

SE PIDE CALCULAR:

a) El brillo máximo de Algol, teniendo en cuenta las tres estrellas. Desprecie la absorción atmosférica. **[1,5 puntos]**

b) El período orbital de la estrella binaria eclipsante, a partir de la curva de luz. **[1 punto]**

c) La longitud de onda del pico de emisión de Algol A y Algol B. **[1 punto]**

d) La frecuencia mínima de la luz, y su longitud de onda, que puede producir efecto fotoeléctrico en el cátodo. **[1 punto]**

En los siguientes apartados utilice una longitud de onda media de 400 nm para el espectro de Algol.

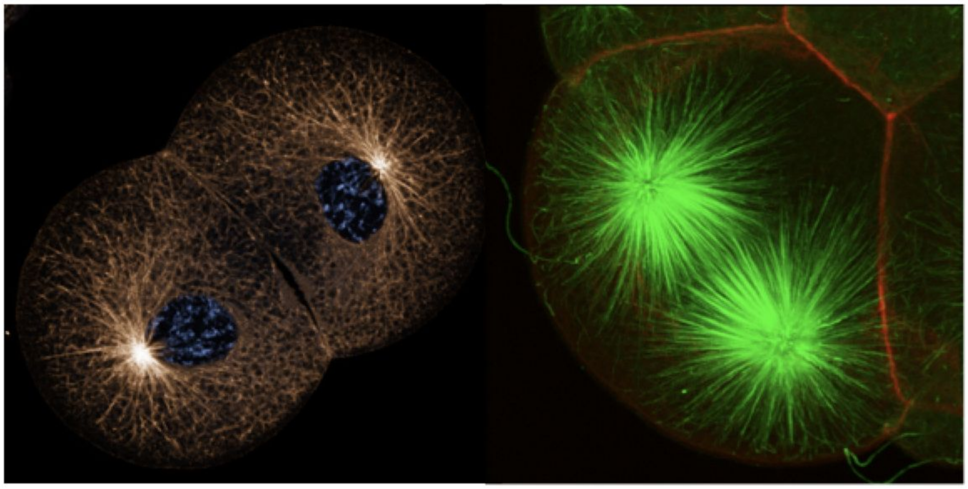
e) El diámetro de la imagen de Algol sobre el cátodo. Suponga que Algol es un objeto puntual y que su imagen está limitada únicamente por la difracción. **[1,5 puntos]**

f) La corriente eléctrica que mide el electrómetro, sabiendo que: la luz útil es el 10% del total, los electrones se arrancan del metal con una eficiencia del 2% y todos los electrones que salen del cátodo llegan al ánodo. **[2,5 puntos]**

g) En qué factor se reduce la corriente eléctrica cuando Algol B eclipsa a Algol A. **[1,5 puntos]**

Problema 4. Dinámica de Microtúbulos.

Los microtúbulos son filamentos que dan rigidez a las células del cuerpo humano. Estos filamentos comienzan radialmente en una región cercana al núcleo celular y se extienden hacia la membrana celular (ver figura).


Helm Lab

En esta pregunta implementaremos una versión simplificada de la dinámica de los microtúbulos para describir el trabajo que realizan en una membrana. La variación en la longitud de un microtúbulo ocurre al agregar o sustraer moléculas de una proteína llamada tubulina a un extremo del filamento (el otro extremo está anclado cerca del núcleo). Estas moléculas de tubulina se pueden encontrar en dos formas diferentes, que llamaremos A y B. Solo se pueden agregar moléculas de tipo A al filamento en crecimiento. En el filamento pueden cambiar de tipo, y solo cuando tienen el tipo B pueden dejar el filamento. Consideremos que la concentración C_A de moléculas de tipo A en el medio ambiente se mantiene constante. La unidad de concentración usada en este problema es el μM = 10^{-6} mol dm^{-3}.

De esta forma, consideraremos que pueden ocurrir tres procesos diferentes, cada uno asociado a una tasa de probabilidad específica.

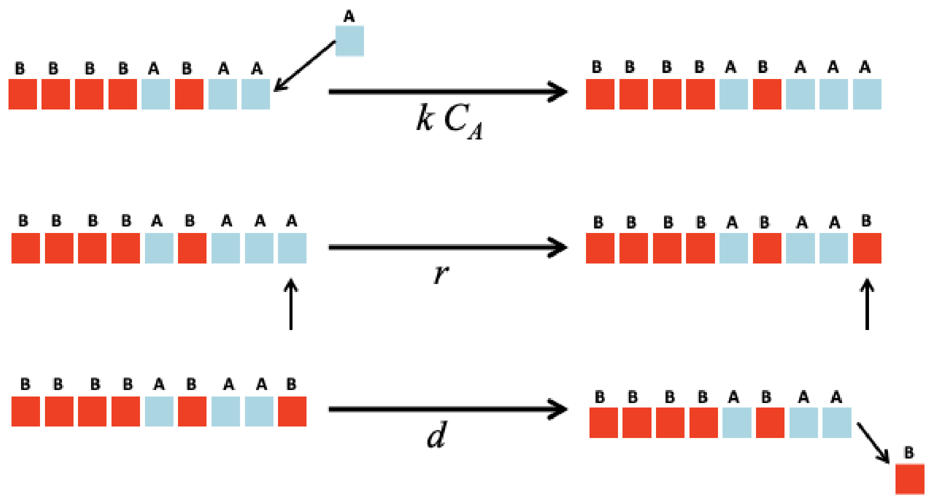
La tasa de probabilidad asociada con cada proceso corresponde a la probabilidad de que el proceso ocurra por unidad de tiempo. Esto implica que si la tasa asociada con un proceso dado es a, entonces el tiempo característico para que suceda ese proceso es $1/a$, y la probabilidad de que el proceso no ocurra durante un período de tiempo t es $P(t) = e^{-at}$.

Los 3 procesos que describen la dinámica de los microtúbulos son los siguientes (ver figura):

1. con tasa de probabilidad dada por $k\, C_A$, con $k = 3,2$ μM^{-1}s^{-1}, se puede agregar una molécula de tubulina tipo A al final del filamento, haciéndolo crecer (proceso de polimerización);
2. con tasa de probabilidad $r = 0,50$ s^{-1}, una molécula en el microtúbulo puede convertir su tipo de A en B; y

3. si al final del filamento hay una molécula de tipo B, entonces puede salir del microtúbulo con una tasa de probabilidad $d = d_0 = 290$ s^{-1} (proceso de despolimerización)

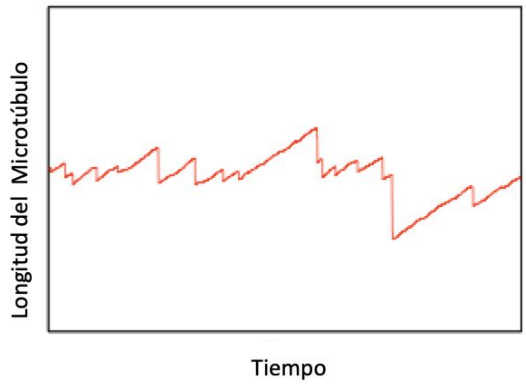
<u>Atención:</u> Los procesos 1 y 3 están asociados con la suma o resta, respectivamente, de una <u>única molécula</u> al filamento. Por otro lado, el proceso 2, con tasa r, puede suceder <u>independientemente</u> en cualquier molécula que esté en el filamento y que sea del tipo A.



También tenga en cuenta que si hay una fuerza que comprime el filamento en la dirección longitudinal, la tasa de probabilidad asociada con el proceso de despolimerización aumenta, tomando el valor de $d = d_0(1 + \alpha F)$, donde F es la fuerza que comprime el microtúbulo y es una constante (este hecho será importante en la segunda parte de este problema).

Debido a estos procesos, la mayoría de las moléculas de tubulina que componen el microtúbulo están en forma B. Sin embargo, suele haber un grupo de moléculas al final del filamento que aún son de tipo A, y que forman un casquete que dificulta la formación de un evento de despolimerización. Puede calcular fácilmente el número medio n de moléculas de tipo A en este límite: teniendo en cuenta que en promedio en todos los intervalos de tiempo $t_1 = 1/kC_A$ una molécula de tipo A es añadida al filamento, obtenemos que durante el tiempo promedio en que una molécula A se convierte en B, $t_2 = 1/r$, se conectarán al filamento $n = t_2/t_1 = kC_A/r$ moléculas de tipo A, que forman la tapa.

En la figura siguiente se muestra un ejemplo de una simulación de la longitud de un microtúbulo en función del tiempo. Se puede observar que la dinámica del microtúbulo se caracteriza por momentos de crecimiento lento separados por eventos muy rápidos de disminución de su tamaño (que ocurren cuando, debido a una fluctuación probabilística, el microtúbulo pierde la cobertura), donde la longitud disminuye dramáticamente.



Parte I

a) Demuestre que el número característico de moléculas de tipo B que abandonan el filamento durante cada evento de despolimerización es $n_d = d_0 / kC_A$. Justifique. **[1 punto]**

b) Estime la vida útil típica del casquete de las moléculas de tipo A al final del microtúbulo. Note que para perder este casquete ninguna molécula del tipo A se puede añadir al microtúbulo durante el tiempo en que las demás moléculas del casquete se cambian de A a B. **[2 puntos]**

c) En promedio, ¿cuántas moléculas crece el filamento en cada período de crecimiento (es decir, siempre que la fibra no pierda la capa)? Exprese este valor en función del número de moléculas en la tapa $n = kC_A/r$ y derive la relación que la concentración C_A tiene que cumplir de modo que la longitud del filamento sea aproximadamente constante. Con la calculadora, obtenga una aproximación numérica (con dos cifras significativas) para el valor de esta concentración. **[2,5 puntos]**

Parte II

Entonces considere que un conjunto de $N = 100$ microtúbulos están dispuestos radialmente dentro de una membrana esférica permeable delgada con tensión superficial $\gamma = 3 \times 10^{-3}$ N/m. Debido a la tensión superficial, sólo se evita que la membrana colapse si existe una diferencia de presión entre su interior y su exterior dada por la ley de Laplace: $\Delta P = 2\gamma/R$, donde R es el radio de curvatura de la membrana.

d) Calcule la fuerza realizada por cada microtúbulo en una membrana con radio 35 μm. **[2 puntos]**

e) Calcule el valor de α, sabiendo que cuando el valor de C_A es tal que el número de moléculas de tubulina de tipo A en la capa del filamento es $n = 10$, el valor más alto posible para el radio de la membrana es 35 μm. **[2,5 puntos]**

Problema 5. Descarga de una botella. Problema de tratamiento de datos. (Experimental).

Una botella cilíndrica, abierta, contiene un líquido azul que se descarga a través de un tubo horizontal. Para este sistema se prueba que la altura del nivel de líquido (z) con respecto al tubo de salida, sigue la siguiente función del tiempo (t),

$$z(t) = z_0 e^{-t/\tau} ,$$

donde z_0, es la altura del líquido en $t = 0$, y τ es una constante que depende de los parámetros del sistema,

$$\tau = \frac{32\, L\, D^2\, \eta}{d^4\, \rho\, g} ,$$

siendo g la aceleración gravitatoria, ρ y η son la densidad y la viscosidad del líquido, respectivamente, L es el largo del tubo, d es su diámetro y D es el diámetro de la botella.

El objetivo de este problema es determinar la viscosidad del líquido a partir de medidas que se deben realizar sobre un video del experimento. Para medir la altura del líquido se debe utilizar una regla sobre la pantalla. No está permitido imprimir.

Además deben considerarse los siguientes datos:

$g = 9,8\ m/s^2$
$\rho = (999 \pm 1)\ kg/m^3$
$L = (11,1 \pm 0,1)\ cm$
$d = (1,8 \pm 0,1)\ mm$
$D = (8,0 \pm 0,1)\ cm$

El video del experimento para realizar las medidas se puede acceder a través de youtube: https://youtu.be/XFxvM9wm8DQ, o descargando el video en su computadora: https://bit.ly/3qAMDHZ

Sugerencia: Se recomienda diseñar un procedimiento que permita realizar múltiples medidas y obtener la magnitud que estamos buscando a partir del ajuste de una gráfica.

En la solución de este problema se debe incluir:

1) Describa cómo obtuvo las medidas y el tratamiento de datos realizado. **[2 puntos]**

2) Medidas y gráficas realizadas (en papel milimetrado). **[5 puntos]**

3) La viscosidad del líquido con incertidumbre. **[3 puntos]**