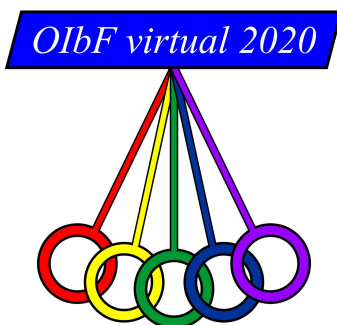


Olimpiada Iberoamericana de Física



Prova teórico-experimental

6 de diciembre de 2020

Problema 1. Um modelo de uma catapulta

Um modelo simples de uma catapulta consiste numa alavanca, que pode ser vista em laranja na figura 1. Esta alavanca é uma haste rígida homogénea/homogênea de massa M e comprimento $L + l$, que gira em redor do eixo O (ver Figura 1 e 2), de forma a que uma das suas extremidades está a uma distância L de O (este último a uma altura h em relação ao solo), e a outra a l de O , com $L > l$.

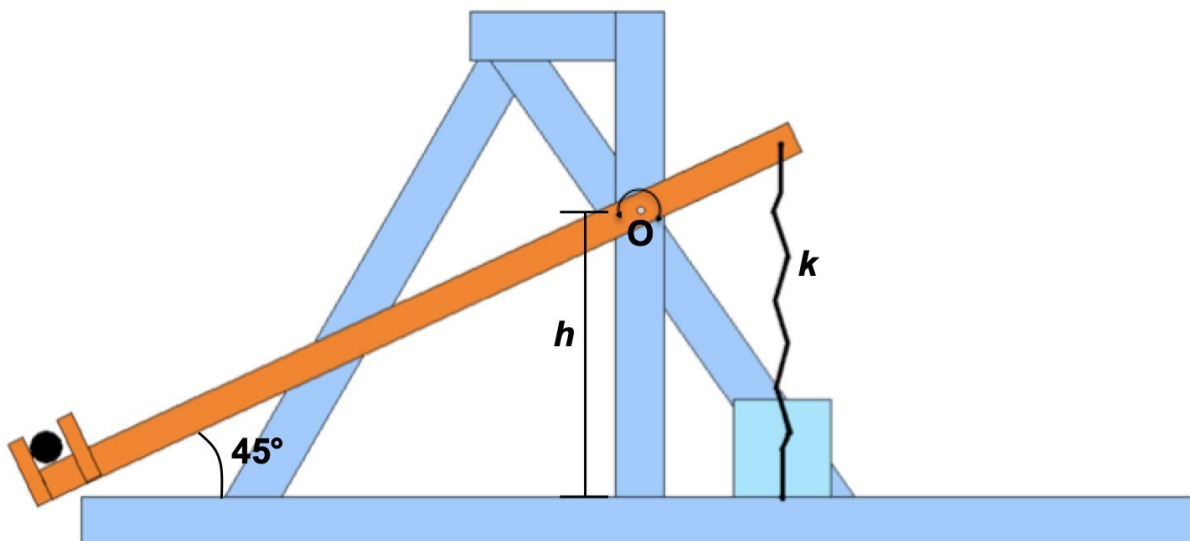


Figura 1. Posição inicial do funcionamento da catapulta.

As dimensões da alavanca são tais que quando a extremidade do braço maior chega ao solo, ela faz um ângulo de 45° com a horizontal. Um projétil de massa m é colocado no braço maior. Para o desenvolvimento deste problema, considere um objeto pontual. Além disso, a extremidade do braço menor está ligada a uma mola com comprimento em repouso l_0 ($l_0 < l$) e de constante elástica k (quando o braço maior chega ao solo, como na figura 1, a mola está alongada e na posição vertical).

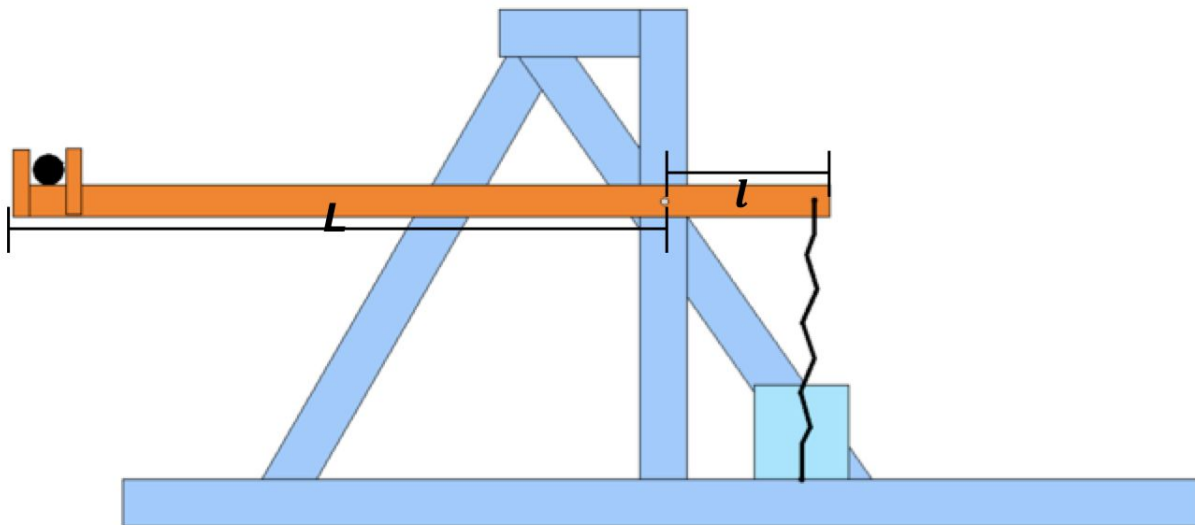


Figura 2. Posição intermediária da catapulta durante o seu movimento.

Neste modelo, existe também um obstáculo que faz a alavanca parar de girar quando esta atinge um ângulo de 45° com a vertical (ver figura 3). A partir desse momento, o projétil é lançado ao ar. Para analisar o funcionamento desta catapulta, considera-se que não há atrito no eixo da alavanca, assim como também se despreza a resistência do ar.

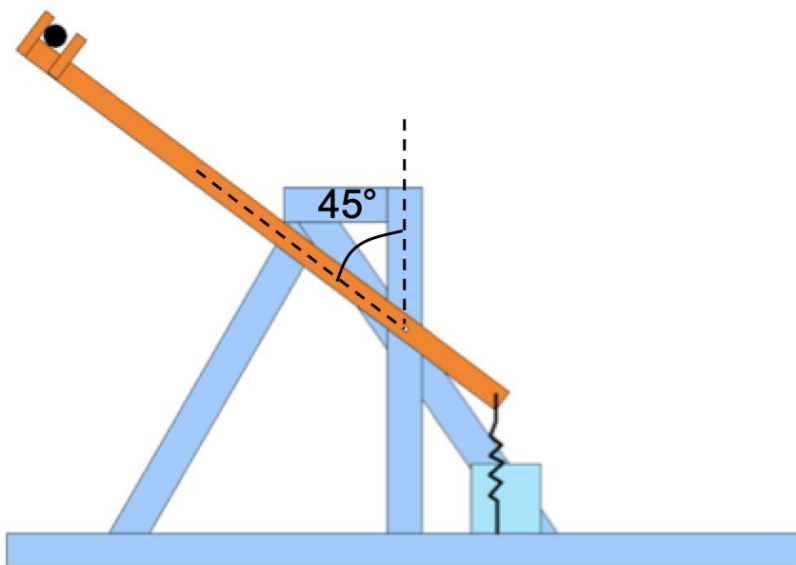


Figura 3. Disposição do sistema no instante do lançamento do projétil.

A posição da extremidade inferior da mola pode ser ajustada para diferentes alturas h' para poder modificar o alcance do lançamento em direção a um alvo (ver figura 4).

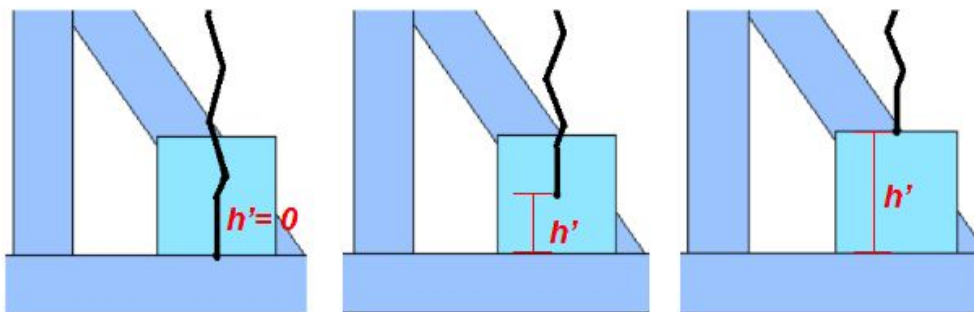


Figura 4. São mostradas as diferentes alturas de ajuste h' da extremidade inferior da mola.

Nota: Nas respostas às perguntas de a) a e) deixar $\sin 45^\circ$ e $\cos 45^\circ$ como tal, NÃO substituir pelo seu valor numérico.

- a. Obtenha uma expressão para o momento de inércia I da alavanca em relação ao eixo perpendicular que passa por O , em função das suas dimensões e massa. Para isso, suponha que as peças que seguram o projétil no seu lugar de forma a impedir que este seja ejetado antes de atingir a posição final têm massas desprezíveis. **[1 ponto]**

Ajuda: O momento de inércia de uma vara em torno de um eixo perpendicular a ela e que passa pelo seu centro de massa é:

$$I_{cm} = \frac{ML^2}{12}, \text{ onde } L \text{ é o comprimento total da barra e } M \text{ a sua massa.}$$

Nas respostas às questões seguintes deixar o momento de inércia como I , se aparecer nas expressões.

A catapulta é carregada com um projétil de massa m e é colocada em funcionamento ajustando a parte de baixo da mola a uma altura h' do solo.

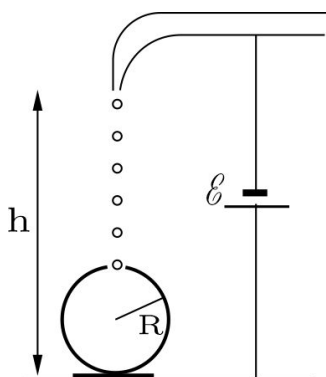
- b. Determinar a expressão para a variação da energia potencial total, em função das massas m e M , da altura h , do comprimento do braço menor da alavanca, da constante elástica k e do comprimento em repouso l_0 da mola, assim como também da altura h' a qual se ajusta a mola. **[2.5 pontos]**
- c. Determinar o módulo da velocidade de saída do projétil. **[2.5 pontos]**
- d. A partir das expressões anteriores, qual é a expressão para a altura máxima h'_{\max} da ponta de baixo da mola, a partir da qual o projétil poderá sair disparado? **[2 pontos]**
- e. Deseja-se atingir um ponto que está a uma altura $2h$ em relação ao solo. Escreva a expressão para a distância horizontal percorrida por esse projétil até encontrar o alvo, utilizando a expressão encontrada em c. **[2 pontos]**

Problema 2. Gotas elétricas

Um sistema está a pingar continuamente gotas idênticas, com raio r e potencial elétrico φ_0 , de um líquido dentro duma esfera oca metálica, que foi previamente descarregada, com paredes finas e raio R . As gotas caem de uma altura h medida a partir do solo de tal forma que $h > 2R$. A esfera está isolada eletricamente do solo. Considere que as gotas são condutoras. Despreze a resistência do ar e considere que a distribuição de cargas na esfera se mantém uniforme, não considerando os efeitos do buraco da esfera no potencial.

- Determine o potencial elétrico máximo que a esfera pode alcançar. Considere duas possibilidades: ou que a esfera se encha completamente, ou que não se chegue a encher. **[7 pontos]**
- Determine para os seguintes dados qual o valor do potencial elétrico da esfera metálica que é possível alcançar: assuma que o líquido é água, e que $r = 0,5 \text{ mm}$, $\varphi_0 = 150 \text{ V}$, $R = 5 \text{ cm}$ e $h = 25 \text{ cm}$. **[2 pontos]**
- Tendo em conta que a ruptura dielétrica do ar ocorre para o campo elétrico 3 kV/mm , determine se o resultado do item b) é possível. **[1 ponto]**

A constante dielétrica do vácuo é $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, a densidade da água $\rho = 1,00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, e a aceleração gravitacional $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

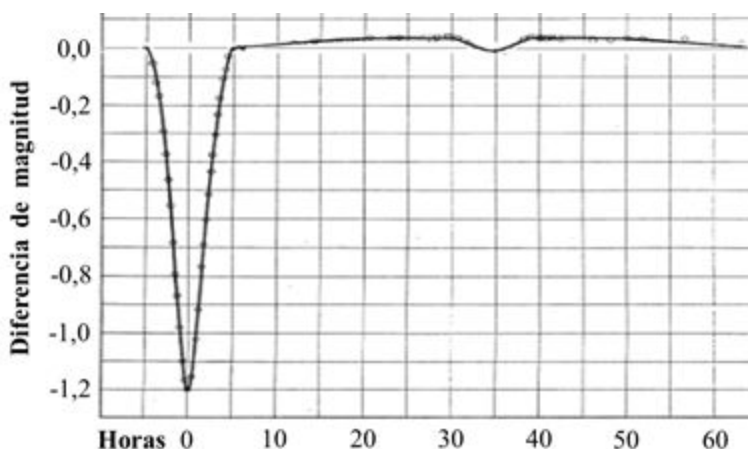


Problema 3. O brilho das estrelas: fotometria fotoelétrica

Um dos problemas mais importantes em astronomia é a medida do brilho dos astros. A fotometria permite responder a este problema. Durante muito tempo a fotometria foi muito imprecisa, pois se realizava através de estimativas visuais ou por meios fotográficos. No princípio do século XX, o astrónomo/astrônomo Joel Stebbins, no Observatório da Universidade de Illinois, começou a utilizar materiais fotossensíveis que produzem uma resposta elétrica. A revolução chegou quando Stebbins, com a colaboração do físico Jakob Kunz, introduziu células fotoelétricas nos detetores dos telescópios. Esta fotometria fotoelétrica tornou-se o estado-da-arte até a chegada das câmaras CCD modernas.

Neste problema vamos estudar a montagem experimental básica de Stebbins e Kunz para medir o brilho de *estrelas variáveis*. Utiliza-se um telescópio refrator do tipo Brashear com objetiva de **31 cm** de diâmetro e uma distância focal de **4,57 m**. O fotómetro/fotômetro é constituído por uma célula fotoelétrica cujo cátodo metálico produz uma corrente de eletrões/elétrons quando é iluminado. O cátodo é constituído por metais alcalinos, rubídio neste caso, com uma função de trabalho de **2,261 eV**. O fotómetro encontra-se acoplado ao telescópio de modo a que o cátodo fique no plano focal da objetiva. A corrente elétrica é medida através da deflexão da agulha de um galvanómetro/galvanômetro ou de um eletrómetro/eletrômetro.

Algol (ou Beta Persei), na constelação de Perseus, a **90 anos-luz** da Terra, é uma das primeiras estrelas variáveis conhecidas. É um sistema formado por três estrelas, A, B e C, muito perto umas das outras. As estrelas Algol A e Algol B orbitam uma à volta da outra, formando uma *estrela binária eclipsante*. Como a Terra está no seu plano orbital, a estrela Algol B (a menos brilhante, mas a maior) eclipsa a estrela Algol A (a mais brilhante mas menor) quando passa pela sua frente em cada período orbital. Deste modo, a quantidade de luz que chega à Terra diminui momentaneamente. O gráfico mostra a *curva de luz* (diferença de magnitude em função do tempo) medida por Stebbins.



A *luminosidade*, L , é a potência emitida por uma estrela em todas as direções. O *brilho*, B , é a potência por unidade de área que chega à Terra. E a *magnitude*, m , é definida de forma a que para duas estrelas de brilhos B_1 e B_2 , a sua diferença de magnitudes é $m_2 - m_1 = 2,5 \cdot \log_{10}(B_1/B_2)$.

DADOS

Constante de Wien = $2897,6 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

Constante de Planck = $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Carga do elétron/elétron = $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Luminosidade do Sol = $3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$

| Estrela | Temperatura (K) | Luminosidade (*) | Raio (*) |
|---------|-----------------|------------------|----------|
| Algol A | 13000 | 182 | 2,7 |
| Algol B | 4500 | 6,9 | 3,5 |
| Algol C | 7500 | 10 | 1,7 |

* Em raios solares

CALCULE:

a) O brilho máximo de Algol, tendo em conta as três estrelas. Despreze a absorção atmosférica de luz. **[1.5 pontos]**

b) O período orbital da estrela binária eclipsante, a partir da curva de luz. **[1 ponto]**

c) O comprimento de onda do pico de emissão de Algol A e de Algol B. **[1 ponto]**

d) A frequência mínima da luz que consegue produzir o efeito fotoelétrico no cátodo. Qual é o comprimento de onda correspondente? **[1 ponto]**

Nas seguintes questões considere um comprimento de onda médio de 400 nm para o espectro de Algol.

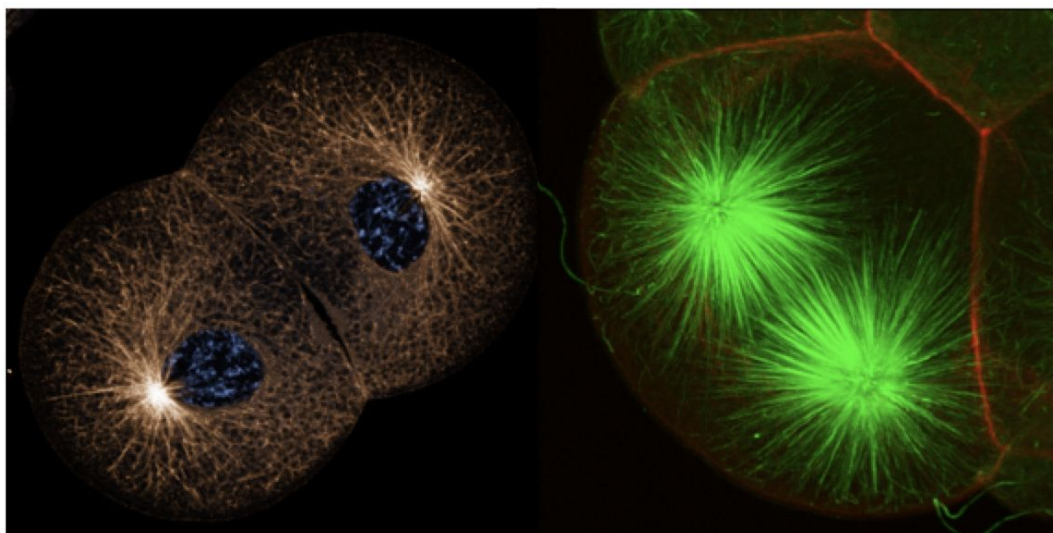
e) O diâmetro da imagem de Algol no cátodo. Supõe que Algol é um objeto pontual e que a sua imagem está limitada unicamente pela difração da luz. **[1.5 pontos]**

f) A corrente elétrica que mede o eletrômetro/eletrometro, sabendo que a luz útil é 10% da total, os elétrons/elétrons se libertam do metal com uma eficiência de 2% e todos os elétrons/elétrons que saem do cátodo chegam ao ânodo. **[2.5 pontos]**

g) Por que fator se reduz a corrente elétrica quando Algol B eclipsa a estrela Algol A. **[1.5 pontos]**

Problema 4. Dinâmica de Microtúbulos.

Os microtúbulos são filamentos que conferem rigidez às células do corpo humano. Estes filamentos partem radialmente de uma região perto do núcleo da célula, e estendem-se na direção da membrana celular (ver figura).



Neste problema iremos implementar uma versão simplificada da dinâmica de microtúbulos de modo a descrever o trabalho que eles realizam sobre uma membrana. A variação do comprimento de um microtúbulo ocorre pela adição ou subtração de moléculas de uma proteína chamada tubulina a uma das extremidades do filamento (a outra extremidade fica ancorada perto do núcleo). Estas moléculas de tubulina podem encontrar-se em duas formas diferentes, que iremos chamar de A e B. Só moléculas do tipo A podem ser adicionadas ao filamento em crescimento. No filamento elas podem alterar o seu tipo, e só quando têm o tipo B é que podem deixar do filamento. Vamos considerar que a concentração C_A de moléculas do tipo A no meio envolvente é mantida constante. A unidade de concentração usada neste problema é o $\mu\text{M} = 10^{-6} \text{ mol dm}^{-3}$.

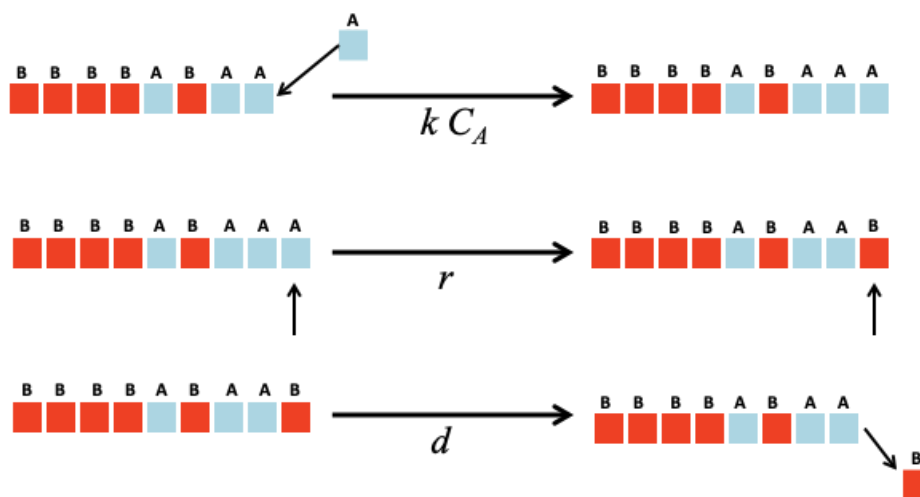
Deste modo, iremos considerar que podem ocorrer três processos distintos, cada um deles associado a uma taxa de probabilidade específica.

A taxa de probabilidade associada a cada processo corresponde à probabilidade do processo ocorrer por unidade de tempo. Isto implica que se a taxa associada a um determinado processo for a então o tempo característico para esse processo acontecer é $1/a$, e a probabilidade que o processo não ocorra num intervalo de tempo t é $P(t) = e^{-at}$.

Os 3 processos que descrevem a dinâmica dos microtúbulos são os seguintes (ver figura):

1. com taxa de probabilidade dada por $k C_A$, com $k = 3,2 \mu\text{M}^{-1}\text{s}^{-1}$, uma molécula de tubulina do tipo A pode ser adicionada à extremidade do filamento, fazendo-o crescer (processo de polimerização);
2. com taxa de probabilidade $r = 0,50 \text{ s}^{-1}$, uma molécula que está no microtúbulo pode converter o seu tipo de A para B; e
3. se na extremidade do filamento estiver uma molécula do tipo B, então ela pode sair do microtúbulo com taxa de probabilidade $d = d_0 = 290 \text{ s}^{-1}$ (processo de despolimerização)

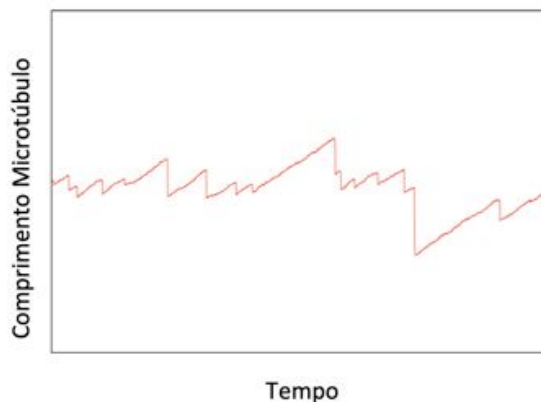
Atenção: os processos 1 e 3 estão associados à adição ou subtração, respetivamente, de uma única molécula ao filamento. Por outro lado, o processo 2, com taxa r , pode acontecer independentemente em qualquer molécula que esteja no filamento e que seja do tipo A.



Note também que se existir uma força que comprima o filamento na direção longitudinal, a taxa de probabilidade associada ao processo de despolimerização aumenta, tomando o valor de $d = d_0(1 + \alpha F)$, onde F é a força comprimindo o microtúbulo e α é uma constante (este facto será importante na segunda parte deste problema).

Devido a estes processos, a maior parte das moléculas de tubulina que constituem o microtúbulo está na forma B. Contudo existe normalmente um grupo de moléculas na extremidade do filamento que ainda são do tipo A, e que formam uma tampa que dificulta a existência de um evento de despolimerização. Pode-se calcular facilmente o número médio n de moléculas do tipo A nesta tampa: sabendo que em média em todos os intervalos de tempo $t_1 = 1/kC_A$ se liga uma molécula do tipo A ao filamento, temos que durante o tempo médio $t_2 = 1/r$ que leva às moléculas A se transformarem em B, se vão ligar ao filamento $n = t_2/t_1 = kC_A/r$ moléculas do tipo A, que vão formar a tampa.

Um exemplo de uma simulação do comprimento de um microtúbulo em função do tempo está representada na figura abaixo. Pode-se observar que a dinâmica do microtúbulo é caracterizada por momentos de crescimento lento separados por eventos muito rápidos de diminuição do seu tamanho (que ocorrem quando, por uma flutuação probabilística, o microtúbulo perde a tampa), onde o comprimento diminui drasticamente.



Parte I

- a) Mostre que o número característico de moléculas do tipo B que deixam o filamento durante cada evento de despolimerização é $n_d = d_0 / kC_A$. Justifique. **[1,0 pontos]**
- b) Estime o tempo de vida característico da tampa de moléculas do tipo A na extremidade do microtúbulo. Note que para perder a tampa, nenhuma molécula do tipo A se deve juntar ao microtúbulo durante o tempo que leva às moléculas da tampa a se converterem de A para B. **[2,0 pontos]**
- c) Em média, por quantas moléculas cresce o filamento em cada período de crescimento (i.e., enquanto a fibra não perde a tampa)? Expresse esse valor em função do número de moléculas da tampa $n = kC_A/r$ e derive a relação que a concentração C_A tem de obedecer de modo a que o comprimento do filamento seja aproximadamente constante. Usando a calculadora, obtenha uma aproximação numérica (com dois algarismos significativos) para o valor desta concentração. **[2,5 pontos]**

Parte II

Considere a seguir que um conjunto de $N = 100$ microtúbulos são organizados radialmente dentro de uma fina membrana esférica permeável com tensão superficial $\gamma = 3 \times 10^{-3}$ N/m. Devido à tensão superficial, a membrana só é impedida de colapsar se existir uma diferença de pressão entre o seu interior e o seu exterior dada pela lei de Laplace: $\Delta P = 2\gamma/R$, onde R é o raio de curvatura da membrana.

- d) Calcule a força exercida por cada microtúbulo para uma membrana com raio 35 μm . **[2,0 pontos]**
- e) Calcule o valor de α , sabendo que quando o valor de C_A é tal que o número de moléculas de tubulina do tipo A na tampa dos filamentos é $n = 10$, o maior valor possível para o raio da membrana é 35 μm . **[2,5 pontos]**

Problema 5. Escoamento de um fluido saindo de uma garrafa. Problema de processamento de dados (experimental)

Uma garrafa cilíndrica aberta contém um líquido azul que escoar através de um tubo horizontal. Para este sistema está demonstrado que a altura do nível do líquido, z , varia em função do tempo, t , do seguinte modo:

$$z(t) = z_0 e^{-t/\tau},$$

onde z_0 , é a altura do líquido a $t = 0$, e τ é uma constante que depende dos parâmetros do sistema:

$$\tau = \frac{32 L D^2 \eta}{d^4 \rho g},$$

onde g é a aceleração da gravidade, ρ e η são a densidade e a viscosidade do líquido, respectivamente, L é o comprimento do tubo, d o seu diâmetro e D é o diâmetro da garrafa.

O objetivo deste problema é determinar a viscosidade do fluido a partir de medições que devem ser feitas a partir de um vídeo da experiência. Para medir a altura do líquido, use uma régua na tela do computador. A impressão em papel não é permitida.

Deve-se também considerar os seguintes dados:

$$\begin{aligned} g &= 9,8 \text{ m/s}^2 \\ \rho &= (999 \pm 1) \text{ kg/m}^3 \\ L &= (11,1 \pm 0,1) \text{ cm} \\ d &= (1,8 \pm 0,1) \text{ mm} \\ D &= (8,0 \pm 0,1) \text{ cm} \end{aligned}$$

O vídeo da experiência para realizar as medições pode ser acessado através do youtube (<https://youtu.be/XFxxM9wm8DQ>) ou fazendo o seu download em <https://bit.ly/3qAMDHZ>.

Sugestão: Recomenda-se que realize um procedimento que utilize múltiplas medições de modo a obter a viscosidade do fluido a partir de um ajuste gráfico.

A solução para este problema deve incluir:

- 1) Breve descrição do procedimento desenvolvido. **[2 pontos]**
- 2) Medidas e gráficos realizados (em papel milimétrico). **[5 pontos]**
- 3) O valor da viscosidade do líquido com incerteza. **[3 pontos]**