Olimpiada Iberoamericana de Física

OIbF virtual 2020

Prueba teórico-experimental

6 de diciembre de 2020

SOLUCIONES

Problema 1. Un modelo de catapulta

a. Por el teorema de ejes paralelos el momento de inercia de para la palanca es:

El momento de inercia para una varilla girando alrededor de eje perpendicular a ella que pasa en por su centro de masa es:

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + M\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{12}M\left(4L^2 - 4Ll + 4l^2\right)$$

$$I = \frac{1}{3}M\left(L^2 - Ll + l^2\right)$$

Solución alternativa:

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + M\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + \frac{1}{12}3M\left[(L+l) - 2l\right]^2$$

$$I = \frac{1}{12}M\left[4(L+l)^2 - 12(L+l)l + 12l^2\right]$$

$$I = \frac{1}{3}M\left[(L+l)^2 - 3(L+l)l + 3l^2\right]$$

b. Para el cambio de energía potencial en el sistema.

El ángulo que forma la palanca con el suelo es de 45°. Se cumple que:

$L = h\sqrt{2}\,;\, h = L\, sen\, 45°$

La energía potencial inicial es igual: a la energía potencial gravitatoria de la palanca cuando está en el punto más bajo más la energía potencial elástica almacenada en el resorte.

$$U_0 = Mg\left[\left(\tfrac{L+l}{2}\right) sen\, 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\left[(L+l)\, sen\, 45° - l_0 - h'\right]^2$$
$$U_0 = Mg\left(\tfrac{L}{2} sen\, 45° + \tfrac{l}{2} sen\, 45°\right) + \tfrac{1}{2}k\,(L\, sen\, 45° + l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2$$
$$U_0 = Mg\left(\tfrac{h}{2} + \tfrac{l}{2} sen\, 45°\right) + \tfrac{1}{2}k\,(h + l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2$$

Para la energía potencial final se tiene:

$$U_f = 2mgh + Mg\left[h + \left(\tfrac{L-l}{2}\right) sen\, 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2$$
$$U_f = 2mgh + Mg\left[h + \tfrac{L}{2}\, sen\, 45° - \tfrac{l}{2}\, sen\, 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2$$
$$U_f = 2mgh + Mg\left[h + \tfrac{h}{2} - \tfrac{l}{2}\, sen\, 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2$$
$$U_f = 2mgh + Mg\left[\tfrac{3h}{2} - \tfrac{l}{2}\, sen\, 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2$$

La diferencia de energía en el sistema es:

$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg\,(h - l\, sen\, 45°) + \tfrac{1}{2}k\left[(h - l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2 - (h + l\, sen\, 45° - l_0 - h')^2\right]$$
$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg\,(h - l\, sen\, 45°) + \tfrac{1}{2}k\,(-2l\, sen\, 45°)\,(2h - 2l_0 - 2h')$$
$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg\,(h - l\, sen\, 45°) - 2k\,(l\, sen\, 45°)\,(h - l_0 - h')$$

c. Por conservación de energía.

$$\Delta K = -\Delta U$$

Donde

$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$

El movimiento angular para el objeto y la palanca es igual, se cumple que:

$\omega = \tfrac{v}{L}$

Entonces

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{mL^2+I}{L^2}\right)v^2$$

Por tanto:

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{mL^2+I}{L^2}\right)v^2 = 2k\,(l\, sen\, 45°)\,(h - l_0 - h') - 2mgh - Mg(h - l\, sen\, 45°)$$

Teniendo así, la velocidad de salida del proyectil

$$v^2 = L^2\,\frac{4k(l\, sen\, 45°)(h-l_0-h')-4mgh-2Mg(h-l\, sen\, 45°)}{mL^2+I}$$
$$v = L\sqrt{\frac{4k(l\, sen\, 45°)(h-l_0-h')-4mgh-2Mg(h-l\, sen\, 45°)}{mL^2+I}}$$

d. Para que salga disparado, se debe de cumplir:

$$v > 0$$

Por tanto:

$$4k\,(l\ sen\ 45°)\,(h - l_0 - h') - 4mgh - 2Mg(h - l\ sen\ 45°) > 0$$

$$4k\,(l\ sen\ 45°)\,(h - l_0 - h') > 4mgh + 2Mg(h - l\ sen\ 45°)$$

$$h - l_0 - h' > \frac{4mgh+2Mg(h-l\ sen\ 45°)}{4k(l\ sen\ 45°)}$$

$$h' < h - l_0 - \frac{4mgh+2Mg(h-l\ sen\ 45°)}{4k(l\ sen\ 45°)}$$

e. La altura a la que está el proyectil cuando sale disparado es $2h$, y el blanco está a la misma altura, el tiempo de caída es:

$$0 = v_y t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{2v_y}{g}$$

Y el alcace x, es:

$$x = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g}$$

$$x = \frac{v^2 2\ sen\ \theta\ cos\ \theta}{g}$$

$$x = \frac{v^2 sen\ 2\theta}{g}$$

Ya que el proyectil se dispara cuando el ángulo es 45° con la vertical, el proyectil sale con un ángulo de 45° sobre la horizontal.

Tal que:

$$x = \frac{v^2}{g}$$

$$x = \frac{L^2}{g}\left[\frac{4k(l\ sen\ 45°)(h-l_0-h')-4mgh-2Mg(h-l\ sen\ 45°)}{mL^2+I}\right]$$

Problema 2. Gotas eléctricas.

Al caer las gotas cargadas comunican carga a la esfera, la cual va a la superficie exterior de la misma. De esta manera surge un campo eléctrico de intensidad cada vez mayor. Este campo se opone a la aproximación de más gotas.

a) Debemos analizar dos posibles casos. Que la esfera alcance la carga máxima antes de llenarse o que se llene del líquido antes de alcanzar la carga máxima.

I) *La esfera no se alcanza a llenar.* Hallemos la velocidad de las gotas al alcanzar la esfera con ayuda de la ley de la conservación de la energía.

En el momento de desprenderse la gota

$$E_1 = mgh + k\frac{qQ}{h-R}$$

Donde m es la masa de las gotitas, q la carga de una esferita y Q la carga instantánea de la esfera. Al llegar al orificio de la esfera

$$E_2 = mg2R + k\frac{qQ}{R} + \frac{mv^2}{2}$$

A partir de la igualdad $E_1 = E_2$ despejamos la energía cinética

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-2R) - kqQ\left(\frac{h-2R}{(h-R)R}\right) \tag{1}$$

Las gotas dejan de ingresar a la esfera en el momento en que la velocidad de las gotas es igual a cero. De aquí podemos obtener que

$$Q = \frac{mg(h-R)R}{kq} \tag{2}$$

Considerando que

$$\varphi_0 = k\frac{q}{r} \ \text{ y } \ \varphi = k\frac{Q}{R} \tag{3}$$

Donde φ es el potencial eléctrico de la esfera. El potencial de la esfera va a ser:

$$\varphi = k\frac{mg(h-R)}{\varphi_0 r}. \tag{4}$$

II) *La esfera se llena.* El número máximo de gotitas que caben en la esfera es

$$N = \frac{R^3}{r^3} \tag{5}$$

La carga que adquiere la esfera es

$$Q = qN = \frac{\varphi_0 r}{k} N = \frac{\varphi_0 R^3}{k r^2}. \tag{6}$$

Donde

$$Q = \frac{\varphi R}{k}. \tag{7}$$

El potencial eléctrico máximo en este caso es:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{R^2}{r^2}. \tag{8}$$

b) Si el líquido es agua, tendremos que si no se llenara la esfera de (4) tenemos

$$\varphi_1 = \frac{\rho g r^2 (h - R)}{3\varepsilon_0 \varphi_0} = 1,2 \times 10^5 \text{ V}$$

Si la esfera se llena de (8) tenemos

$$\varphi_2 = 1,5 \times 10^6 \text{ V} > \varphi_1..$$

Debemos verificar que sí es φ_1 el potencial que se establece. De (5) la esfera se llena con $N_1 = 1,0 \times 10^6$ gotitas. De (3) y (6) se encuentra que

$$N_2 = \frac{Q}{q} = \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{R}{r} = 8,2 \times 10^4 \ < \ N_1$$

Que confirma que el potencial que se establece es φ_1.

c) Con ayuda de la expresión $E = \frac{\varphi}{r}$. hallamos que el campo de una gotita es $E' = 3,0 \times 10^5 \text{ V/m}$ y el campo formado por la esfera es $E'' = 2,5 \times 10^6 \text{ V/m}$, por lo que no hay ruptura.

Problema 3. El brillo de las estrellas: fotometría fotoeléctrica.

a) La luminosidad máxima de Algol es la suma de las tres luminosidades (cuando ninguna estrella eclipsa a otra):

$$L = 182 + 6{,}9 + 10 = 198{,}9 \cdot L_{Sol} \rightarrow \quad L = 198{,}9 \cdot 3{,}828 \cdot 10^{26} = 7{,}614 \cdot 10^{28} \text{ W}$$

El brillo es la luminosidad dividida por la superficie de la esfera que alcanza la Tierra:

$B = \dfrac{L}{4\pi \cdot d^2}$, donde d es la distancia de la estrella a la Tierra.

Pasamos la distancia Algol-Tierra de años luz a metros:

$$d = 90 \cdot (3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) = 8{,}515 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

El brillo de Algol resulta

$$B_{Algol} = 8{,}36 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

b) En la curva de luz vemos dos mínimos. El mínimo principal ocurre cuando Algol B pasa por delante de Algol A, y el mínimo secundario cuando pasa justo por detrás. Entonces, el intervalo de tiempo entre los dos mínimos corresponde a la mitad del período orbital.

En la gráfica medimos aproximadamente 34,5 horas. Por tanto, el período es

69 horas = 2,875 días

c) De acuerdo a la ley de Wien, la longitud de onda en la que se produce el pico de emisión es inversamente proporcional a la temperatura de la estrella. Utilizando el dato de la constante de Wien del enunciado y las temperaturas de Algol A y Algol B, se obtiene

$$\lambda_{pico} = \frac{2897{,}6 \cdot 10^3 \text{ (nm} \cdot \text{K)}}{T \text{ (K)}} = \begin{cases} 222{,}9 \text{ nm, para Algol A} \\ 643{,}9 \text{ nm, para Algol B} \end{cases}$$

d) Según la ley de la emisión fotoeléctrica, la frecuencia mínima se obtiene a partir de la energía del fotón, $h \cdot f$, y de la función de trabajo del metal (rubidio) iluminado, W_0 (pasando previamente de electronvoltios a julios):

$$h \cdot f = W_0 \quad \rightarrow \quad f_{min} = \frac{W_0}{h} = \frac{2{,}261 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ (J)}}{6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}} = 5{,}47 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

La longitud de onda correspondiente es

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f} = 548{,}79 \text{ nm}$$

e) El objetivo del telescopio, de longitud focal $f' = 4{,}57$ m y diámetro $D = 31$ cm, focaliza la luz sobre el cátodo. La difracción producirá una imagen circular (mancha de Airy) de radio

$$\sin\theta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} = \frac{r}{f'} \quad \rightarrow \quad r = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot f' = 1{,}22 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-9}}{0{,}31} \cdot 4{,}57 = 7{,}194 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Entonces, el diámetro de la imagen de Algol es el doble del radio:

$$2r = 1{,}44 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 14{,}4 \text{ μm}$$

f) Para calcular la corriente eléctrica primero necesitamos conocer el número de fotones que llegan al cátodo. El área del objetivo del telescopio es

$$A = \pi \cdot (D/2)^2 = \pi \cdot (0{,}31/2)^2 = 0{,}0755 \text{ m}^2$$

Sabiendo el brillo del apartado a), la energía que entra al telescopio en 1 segundo será

$$E = (B_{Algol} \cdot t) \cdot A = 8{,}36 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 0{,}0755 = 6{,}309 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Pero la energía de un único fotón para una longitud de onda de 400 nm vale

$$E_{fotón} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9}} = 4{,}970 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por tanto, el número de fotones por segundo que entran al telescopio es

$$N = \frac{E}{E_{fotón}} = \frac{6{,}309 \cdot 10^{-10}}{4{,}970 \cdot 10^{-19}} = 1{,}27 \cdot 10^9 \text{ fotones por segundo}$$

Como sólo el 10% de la luz es útil (nótese que por encima de la longitud de onda máxima no se produce efecto fotoeléctrico), la eficiencia en el metal es el 2% y todos los electrones arrancados del cátodo llegan al ánodo. Entonces, los electrones que llegan al ánodo son

$$N_e = N \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02 = 1{,}27 \cdot 10^9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02 = 2{,}54 \cdot 10^6 \text{ electrones por segundo}$$

La corriente eléctrica que mide el electrómetro será el número de electrones por segundo, N_e, multiplicado por la carga del electrón:

$$I = N_e \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 2{,}54 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 4{,}07 \cdot 10^{-13} \text{ A}$$

g) De lo anterior concluimos que la corriente eléctrica es proporcional al brillo de la estrella:

$$I_1 / I_2 = B_1 / B_2$$

En la curva de luz vemos que la diferencia de magnitud es $m_1 - m_2 = -1{,}2$.

Entonces, de la expresión para la diferencia de magnitudes obtenemos:

$$-1{,}2 = 2{,}5 \cdot \log_{10}(B_2 / B_1) \quad \rightarrow \quad B_2 = B_1 / 3$$

Es decir, el brillo disminuye a la tercera parte cuando Algol A es eclipsada por Algol B.

En consecuencia, también la intensidad de corriente eléctrica disminuirá en el mismo factor:

$$I_2 = I_1 / 3$$

Problema 4. Dinámica de Microtúbulos.

a) Tiempo para que la molécula se disocie: $t_3 = 1/d$. El número de moléculas que se disocian es el número de eventos de despolimerización durante el tiempo que tarda una molécula en adherirse al filamento: $n_d = t_1/t_3 = d/kC_A$.

b) Probabilidad de no tener eventos de unión a moléculas A durante un tiempo t_2 é $e^{-kC_A/r}$. La tasa de probabilidad asociada con este proceso es entonces $e^{-kC_A/r}/t_2 = re^{-n}$. Entonces, el tiempo característico para perder la tapa es el inverso de este valor: $t_C = e^n/r$.

c) Durante t_C el número típico de moléculas que se agregan es $t_C/t_1 = kC_A e^n/r = n\,e^n$. Para que la longitud sea constante, este número de moléculas debe ser similar al número de moléculas perdidas en un evento de despolimerización, o sea: $n\,e^n = d/kC_A = d/rn$. Entonces, la ecuación que el número de moléculas en el casquete debe obedecer para que la longitud sea constante es $n^2\,e^n = d/r$. Sustituyendo (numéricamente) los valores de n, el resultado del número de moléculas en la capa del filamento es $n = 3,73$. Entonces $C_A = 0,58$ µM.

d) $F = (2\gamma/R)\,4\pi\,R^2/N = 26\,nN$

e) Para $n = 10$ el microtúbulo está en equilibrio, entonces: $n^2\,e^n = d_0(1 + \alpha\,F)/r$. Luego: $\alpha = (r\,n^2\,e^n/d_0 - 1)/F = N\,(r\,n^2\,e^n/d_0 - 1)/(8\pi\,\gamma\,R) = 1,4 \text{ x } 10^{12}$ /N = 1,4 /pN.

Problema 5. Descarga de una botella. Problema de tratamiento de datos. (Experimental).

Midiendo directamente sobre la pantalla del video se obtienen algunos pares de valores altura-tiempo (sin necesidad de escala, pues el ajuste es logarítmico):

t=[2.5 12.9 37.5 51.9 69.4 83.5 99.5 125.4 146 153.5 167.5 186 205.4 222 233.5] (s)

z=[15.4 15 13.9 13.3 12.7 12.1 11.6 10.7 10 9.8 9.3 8.8 8.3 7.9 7.5] (cm)

Como $z = z_0 e^{-t/\tau}$, entonces $Ln(z) = -\frac{1}{\tau} t + Ln(z_0)$,

Donde $-1/\tau$, es la pendiente de la recta de mejor ajuste.

A partir de los datos experimentales, se obtiene la recta de mejor ajuste, cuya pendiente es,

$-1/\tau = (-0,00307 \pm 0,00003)\, s^{-1}$

Finalmente, como $\tau = \dfrac{32\, L\, D^2\, \eta}{d^4\, \rho\, g}$,

entonces la viscosidad del líquido azul es, $\eta = (1,5 \pm 0,7) \times 10^{-3}\ kg/(m{\cdot}s)$