

Pedras Saltitantes (12 pontos) ¹

Parte A - As colisões e o modelo aproximado (3,9 pontos)

A.1	Escreva uma expressão para a área submersa S_{im} da pedra em função de z, l, θ .	0,5pt
------------	--	-------

Solução A.1 (0.5 pt)		
Dadas aproximações no texto, a área S_{im} consiste em um retângulo com um lado sendo l , e o outro lado é obtível por trigonometria como $ z /\sin\theta$. Com isso, $S_{im} = \frac{l z }{\sin\theta}$. Note a importância do módulo já que z é negativo.		

A.2	Escreva a aceleração vertical e horizontal da massa a_x e a_z respectivamente.	0,5pt
------------	--	-------

Solução A.2 (0.5 pt)		
Para as equações de movimento precisamos decompor a força descrita pela equação 1 no eixo horizontal e vertical. Por trigonometria simples, considerando o ângulo θ temos:		
$F_x = -\frac{1}{2}\rho V^2 S_{im}(C_l \sin\theta + C_f \cos\theta)$		(1)
$F_z = +\frac{1}{2}\rho V^2 S_{im}(C_l \cos\theta - C_f \sin\theta)$		(2)
Dessa forma, temos para a aceleração em x :		
$a_x = \frac{F_x}{M} = -\frac{1}{2M}\rho V^2 S_{im}(C_l \sin\theta + C_f \cos\theta)$		(3)
Em z também devemos lembrar da força peso, assim temos:		
$a_z = -g + \frac{F_z}{M} = -g + \frac{1}{2M}\rho V^2 S_{im}(C_l \cos\theta - C_f \sin\theta)$		(4)

A.3	Considerando as aproximações descritas acima, ache $z(t)$.	1.0pt
------------	---	-------

Solução A.3 (1.0 pt)		
Dado que $V_z \ll V_x$ temos que $V^2 \approx V_x^2$. Dessa forma, usando a expressão para S_{im} - e lembrando que $z < 0$, temos que:		
$a_z = -g - \frac{1}{2M}\rho V_x^2 l \bar{C} \frac{z}{\sin\theta}$		(5)
Onde denominamos $\bar{C} = (C_l \cos\theta - C_f \sin\theta)$. Essa equação é facilmente característica de um MHS com posição de equilíbrio deslocado para $z_{eq} = -\frac{g}{\omega^2}$, onde $\omega^2 = \frac{\rho V_x^2 l \bar{C}}{2M \sin\theta}$. A partir disso, temos que a solução para $z(t)$ é da forma $z(t) = -\frac{g}{\omega^2} + A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$, para duas constantes A, B determinadas pelas condições iniciais. Incluindo essas condições e resolvendo para A, B obtemos:		
$z(t) = -\frac{g}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{V_z^{(0)}}{\omega} \sin(\omega t)$		(6)

A.4	Baseada na discussão acima, escreva a condição limitante para a profundidade máxima z .	0,5pt
------------	---	-------

¹Autoria de Thomas Bergamaschi

Solução A.4 (0.5 pt) Pelo fato que no texto foi discutido que a pedra não pode se submergir completamente, esperamos que z_{\max} é tal que a pedra fica no limiar. Imediatamente, esperamos que $|z_{\max}| = l \sin \theta$ por simples trigonometria. Logo a condição limitante é que $|z| < l \sin \theta$.

A.5 Encontre a velocidade limitante V_{\min} para que a pedra faça um pulo na água. 0,9pt

Solução A.5 (0,9 pt) Para achar V_{\min} simplesmente usamos nossa expressão para $z(t)$ e demandamos que durante toda a oscilação $|z(t)| \leq l \sin \theta$. Para fazer isso notamos que podemos escrever a solução para $z(t)$ da forma:

$$z(t) = -\frac{g}{\omega^2} + C \cos(\omega t + \phi) \quad (7)$$

Para dois valores de C e ϕ . É fácil verificar que $C = \sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{V_z^{(0)}}{g}\right)^2}$, de forma que a profundidade máxima z atingida é $|z_{\max}| = -\left(-\frac{g}{\omega^2} - C\right) = \frac{g}{\omega^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega V_z^{(0)}}{g}\right)^2}\right)$.

Dessa forma, na velocidade limite temos que $l \sin \theta = |z_{\max}|$, e usando que $\tan \beta = \frac{V_z^{(0)}}{V_x}$, resolvemos para V_x obtendo:

$$V_x > \frac{\sqrt{\frac{4Mg}{C\rho l^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2 \tan^2 \beta M}{l^3 C \rho \sin \theta}}} \quad (8)$$

A.6 Encontre a região de valores para θ para que a pedra possa fazer um salto na água. 0,5pt

Solução A.6 (0.5 pt) Para achar o ângulo θ limitante, precisa se apenas observar a equação para a condição limitante de V_x , e notar que se $\sin \theta$ for pequeno o denominador da velocidade mínima vira complexo, não fazendo sentido físico. Dessa forma, o ângulo limitante é θ_C onde:

$$\sin \theta_C = \frac{2 \tan^2 \beta M}{l^3 \bar{C} \rho} \quad (9)$$

Para ângulos θ menor que esse limite o fenômeno não ocorre.

Parte B - Dissipação de Energia (4.6 pontos)

B.1 Considerando dissipação, escreva a relação entre V'_x, V_x e o trabalho dissipado W . 0,5pt

Solução B.1 (0.5 pt)

Essa relação é imediata e temos simplesmente:

$$\frac{MV_x'^2}{2} - \frac{MV_x^2}{2} = -W \quad (10)$$

B.2 Ache W em função de V_x , o valor medio da força em x $\langle F_x(t) \rangle$ durante a colisão, e o tempo da colisão t_{col} . 0,6pt

Solução B.2 (0.6 pt)

Assumindo uma velocidade V e força F constante (em direções opostas) agindo por um tempo Δt , teríamos um trabalho dissipado $W = -F(V\Delta t)$. Para o caso de uma força não constante teríamos algo similar, da forma $W = -\langle F_x(t) \rangle V_x t_{\text{col}}$.

B.3 Usando os resultados da parte **A**, escreva uma expressão para o tempo de colisão t_{col} . 0,5pt

Solução B.3 (0.5 pt)

Na Parte **A**, esperamos o tempo de colisão ser o tempo para que a pedra retorne para $z = 0$. Logo, esperamos que $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

B.4 Novamente voltando para a parte **A**, ache uma relação familiar entre F_x e F_z , similar à força de atrito comum, da forma $F_x = \mu F_z$, e encontre μ em função de constantes do sistema. 0.5pt

Solução B.4 (0.5 pt)

Observando as equações para F_x, F_z , temos a relação que:

$$F_x = F_z \frac{C_l \sin \theta + C_f \cos \theta}{C_l \cos \theta - C_f \sin \theta} \quad (11)$$

Logo temos um “coeficiente de atrito” $\mu = \frac{C_l \sin \theta + C_f \cos \theta}{C_l \cos \theta - C_f \sin \theta}$.

B.5 Obtenha $\langle F_z(t) \rangle$ e conseqüentemente $\langle F_x(t) \rangle$. 1.0pt

Solução B.5 (1.0 pt)

Para $\langle F_z(t) \rangle$, considere inserir nossa equação para $z(t)$ dentro da expressão de F_z . Dessa forma, temos que:

$$F_z(t) = \frac{\rho V^2 l \bar{C}}{2 \sin \theta} |z(t)| = \frac{\rho V^2 l \bar{C}}{2 \sin \theta} \left(\frac{g}{\omega^2} + C \cos(\omega t + \phi) \right) \quad (12)$$

Onde notamos que $z(t)$ é sempre negativo no intervalo considerado. Agora, ao tirar a média da quantia acima, notamos que a média de $\cos(\omega t + \phi)$ sobre um período vai dar sempre 0, ficando com apenas:

$$\langle F_z(t) \rangle = \frac{\rho V^2 l \bar{C}}{2 \sin \theta} \frac{g}{\omega^2} = Mg \quad (13)$$

Dessa forma, $\langle F_x(t) \rangle = Mg\mu$.

B.6 Com base nos itens anteriores, escreva V'_x em função de V_x e constantes básicas do sistema. Também escreva uma expressão para a velocidade mínima da pedra para ela sequer saltar na água. 1.0pt

Solução B.6 (1.0 pt)

Combinando os resultados acima, temos que $V'_x = \sqrt{V_x^2 - 2g\mu k}$, onde $k = V_x t_{\text{col}} = 2\pi \sqrt{\frac{2M \sin \theta}{C \rho l}}$. Imediatamente extraímos uma velocidade mínima de $V_x > \sqrt{2g\mu k}$.

- B.7** Com base nos valores de constantes fornecidas acima, calcule a velocidade mínima para a pedra fazer um salto na água. Novamente usando essas constantes, escreva qual das duas condições para a velocidade é mais limitante que a outra. 0.5pt

Solução B.7 (0.5 pt)

Usando os valores de constantes, obtemos para a velocidade mínima da parte **A** $V_x > 1.1m/s$, enquanto pela condição da parte **B** temos $V_x > 1.9m/s$, logo a velocidade mínima deve ser a mais rígida das duas, assim sendo a segunda condição.

Parte C - O Movimento da Pedra(3.5 pontos)

- C.1** Assumindo uma velocidade inicial de $V_x^{(0)}$, escreva uma expressão para $V_x^{(n)}$, a velocidade depois da n -ésima colisão. 1,0pt

Solução C.1 (1.0 pt)

Dado que $V_x'^2 - V_x^2 = -2g\mu l$, esperamos que depois da n -ésima colisão:

$$V_x^{(n)} = \sqrt{(V_x^{(0)})^2 - 2g\mu kn} \quad (14)$$

Após resolver uma recursão simples.

- C.2** Escreva uma expressão para o numero total de colisões N_{col} . 1,0pt

Solução C.2 (1.0 pt)

Olhando para a equação para a velocidade em função do número de colisões, esperamos que vai ter N_{col} colisões, onde $N_{col} = \frac{(V_x^{(0)})^2}{2g\mu k}$.

- C.3** Sabendo que o recorde mundial para o número de saltos é $N_{max} = 88$, e utilizando as constantes dadas na parte **B**, estime a velocidade inicial $V_x^{(0)}$ no eixo x para atingir este número de saltos. 0.5pt

Solução C.3 (0.5 pt)

Usando os dados numéricos, temos $\frac{(V_x^{(0)})^2}{2g\mu l} \approx 88$. Logo esperamos $V_x^{(0)} \approx 18m/s$.

- C.4** Encontre a distância percorrida horizontalmente pela pedra entre a n -ésima e $n+1$ -ésima colisão $\Delta X(n)$, e esboçe este gráfico. 1,0pt

Solução C.4 (1,0 pt)

Entre sucessivos saltos teremos um movimento parabólico da pedra, com velocidade vertical $V_z^{(0)}$, e horizontal $V_x^{(n)}$. Logo:

$$\Delta X(n) = 2 \frac{|V_z^{(0)}| V_x^{(n)}}{g} = \Delta X_0 \sqrt{1 - \frac{n}{N_{col}}} \quad (15)$$

Onde $\Delta X_0 = 2 \frac{|V_z^{(0)}| V_x^{(0)}}{g}$.

Duplo oscilador (9 pontos)¹

Parte A - Oscilador LC (1 ponto)

- A.1** Sabendo que a carga elétrica armazenada no capacitor do circuito LC pode ser representada por uma função harmônica $Q(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, determine a frequência angular ω de oscilação em termos de L e C . 1,0pt

Solução A.1 (1,0 pt)

S1: A resposta pode ser obtida por análise dimensional. Veja:

$$U_m = \frac{LI^2}{2} \Rightarrow [L] = H = J/A^2 = \frac{C^2 \cdot s^2}{kg \cdot m^2}$$

$$U_e = \frac{CV^2}{2} \Rightarrow [C] = F = J/V^2 = \frac{kg \cdot m^2}{C^2}$$

Por inspeção direta, verificamos que

$$[LC] = s^2.$$

Como ω tem dimensão de s^{-1} e depende apenas de L e C , segue, portanto que

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

S2: Usando a definição de capacitância, a tensão elétrica no capacitor vale $V_c = Q(t)/C$. Pela lei de Lenz, a tensão no indutor é relacionada à variação de fluxo magnético da seguinte forma:

$$V_L = -\frac{d\phi_M}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt}$$

Em que usamos a definição de auto-indutância $\phi_M = Li$. Assim, a continuidade da tensão elétrica exige que:

$$V_L + V_C = -L\frac{di(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Usando que $i'(t) = A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$, em que o sinal de menos é por conta da polaridade correta do capacitor, temos a resposta esperada:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

¹Autoria de Vinícius Névoa

Parte B - Oscilador duplo (4 pontos)

B.1 Determine o período de oscilação T desse circuito. Deixe sua resposta em termos de L_1 e C . 1,25pt

Solução B.1 (1,25 pt) O período de um oscilador LC simples é dado por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

O período do oscilador duplo é composto de duas partes: uma semi-oscilação do circuito L_1C e uma semi-oscilação do circuito L_2C . Na primeira fase, a corrente passa somente pelo indutor L_1 e o diodo de L_2 está fechado. Na segunda parte a situação se inverte.

Dessa maneira, o período do oscilador duplo é dado por

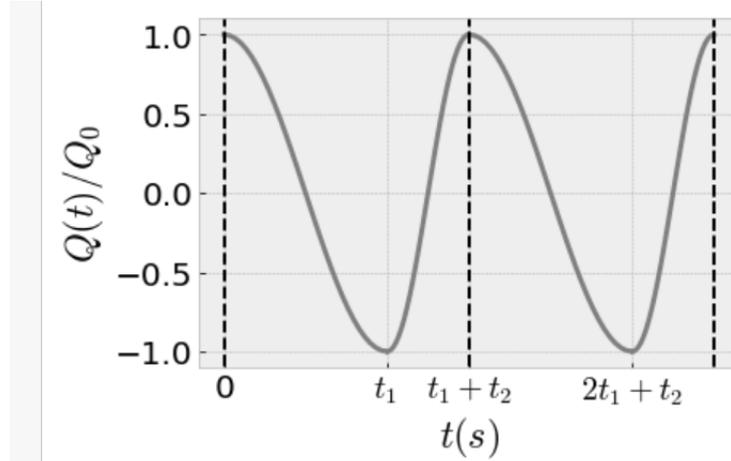
$$T = \pi \left(\sqrt{L_1C} + \sqrt{L_2C} \right) = 3\pi\sqrt{L_1C}.$$

B.2 Esboce o gráfico da carga $Q(t)$ armazenada no capacitor em função do tempo, destacando quantidades relevantes. 1,25pt

Solução B.2 (1,25 pt) O período de um oscilador LC é dado pela expressão

$$T = 2\pi\sqrt{L_1C}.$$

Como o período do oscilador duplo é composto de dois semiperíodos de osciladores LC diferentes, segue que a curva $Q(t)$ é obtida combinando dois ramos de senoide repetidos periodicamente. Uma de duração $t_1 = \pi\sqrt{L_1C}$ e o outro de duração $t_2 = \pi\sqrt{L_2C} = 2\pi\sqrt{L_1C}$.



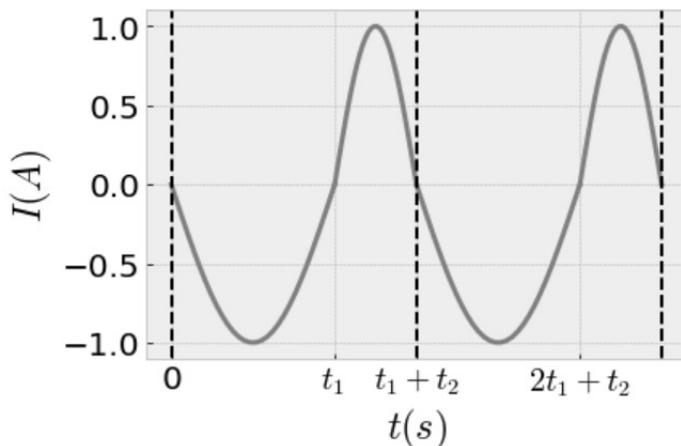
B.3 Esboce o gráfico da corrente $I(t)$ que passa pelo indutor em função do tempo, destacando quantidades relevantes. Escreva a função correspondente a esse gráfico. 1,0pt

Solução B.3 (1,0 pt)

Como o período do oscilador duplor é composto de dois semiperíodos de osciladores LC diferentes, segue que a curva $I(t)$ é obtida combinando dois ramos de senoide repetidos periodicamente, além de um reajuste da amplitude, que agora vale $Q_0\omega$, e portanto é diferente em cada meio-ciclo.

$$I_1(t) = -\frac{Q_0}{\sqrt{L_1C}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L_1C}}\right)$$

$$I_2(t) = -\frac{Q_0}{\sqrt{L_2C}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L_2C}}\right)$$



B.4 O circuito descrito apresenta algum tipo de perda? Se sim, aponte em que elemento do circuito acontece a perda. 0,5pt

Solução B.4 (0,5 pt)

Não, não ocorre dissipação de energia no diodo uma vez que este é ideal.

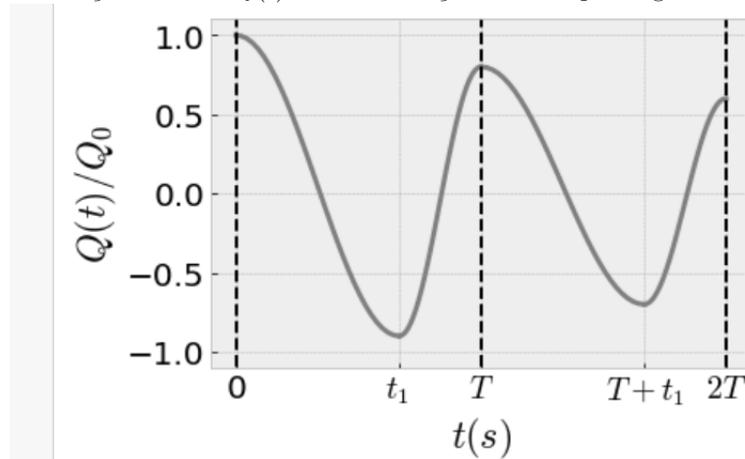
Parte C - Oscilador duplo com diodos reais (4 pontos)

C.1 Faça um esboço do comportamento do circuito em um diagrama carga $Q(t)$ em função do tempo. Considere a mesma condição inicial anterior (carga inicial Q_0 e corrente inicial nula) e um intervalo de tempo entre 0 e $2T$. Indique o valor final da carga do capacitor, $Q(2T)$, no seu esboço. 2,0pt

Solução C.1 (2,0 pt) A tensão inicial do capacitor é dada por $V_0 = Q_0/C$. Quando o capacitor era ideal, a corrente se tornava nula quando a tensão assumia o valor de $V_0 = -Q_0/C$ de qual forma que a oscilação se manteria de forma segundo o modelo.

Quando o termo V_b é incluído, a corrente se anula quando $V_0 = V_b - Q_0/C$, reduzindo a amplitude de oscilação. A cada período de oscilação (semiciclos esquerdo e direito) a amplitude de oscilação de tensão reduz-se em $2V_b$ e, conseqüentemente, a amplitude de oscilação de carga reduz-se em $2CV_b$.

O esboço da curva $Q(t)$ nessas condições é dado pela figura a seguir.



E, finalmente, a carga final solicitada é dada por

$$Q(2T) = Q_0 - 4CV_b.$$

C.2 Supondo que $V_b \ll Q_0/C$, estime o tempo para que a energia total armazenada no circuito caia para metade. 2,0pt

Solução C.2 (2,0 pt) Do que vimos anteriormente, temos que após n períodos T , segue que

$$Q_n = Q(nT) = Q_0 - 2nCV_b. \quad (2)$$

Na condição de metade da energia dissipada, segue que

$$\frac{\frac{CQ_n^2}{2}}{\frac{CQ_0^2}{2}} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{Q_n}{Q_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo a expressão 2, segue que

$$\frac{Q_0 - 2nCV_b}{Q_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Isolando n , encontramos

$$n \approx \frac{Q_0}{2CV_b} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Finalmente, a estimativa de tempo desejada, é dada por

$$\Delta t_{1/2} = nT = \frac{3\pi Q_0}{2CV_b} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{L_1 C}.$$

Detecção de Múons (9 pontos)³

Parte A - Detecção de múons no solo (2,5 pontos)

- A.1** Estime a distância típica percorrida por múons durante um tempo de meia-vida $T_{1/2}$ medido por um observador em solo. 1,0pt

Solução A.1 (1,0 pt)

A energia cinética do múon $K_0 \gg mc^2$ é o suficiente para garantir que o múon viaje com velocidade próxima à da luz do vácuo c . A distância solicitada pode ser estimado através da multiplicação da velocidade da luz c pelo tempo de meia-vida $T_{1/2}$. Veja

$$D \approx c T_{1/2} = 660 \text{ m.}$$

Resultados analíticos considerando a energia cinética fornecida devem ser aceitos e levam a esse mesmo resultado aproximado

$$D \approx c \left[1 - \left(\frac{mc^2}{K_0} \right)^2 \right] T_{1/2} \approx 660 \text{ m.}$$

- A.2** Estime a distância típica que múons de energia cinética K_0 podem percorrer na atmosfera terrestre. 1,5pt

Solução A.2 (1,5 pt)

Determinar coeficiente de Lorentz γ :

$$E = K_0 + mc^2 = \gamma mc^2$$

$$\gamma = 1 + \frac{K_0}{mc^2} \approx \frac{K_0}{mc^2}$$

Cálculo da velocidade do múon:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{K_0}{mc^2}$$

$$v = c \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{K_0}{mc^2} \right)^2} \right) \approx c \left[1 - \left(\frac{mc^2}{K_0} \right)^2 \right].$$

O tempo de meia-vida, ao ser medido por um observador em solo sofre efeitos de dilatação, tomemos um tempo médio de vida de um múon no referencial de um observador no solo como

$$T'_{1/2} = \gamma T_{1/2}.$$

Estimativa de distância percorrida por um múon:

$$D' = v T'_{1/2} \approx 9,3 \text{ km.}$$

Caso não seja adotada a aproximação para γ e v :

$$D' = v T'_{1/2} \approx 10 \text{ km.}$$

³Autoria de Maurício Pazianotto

Parte B - Espectro de energia de múons (3,5 pontos)

B.1 Com base nas informações fornecidas, calcule o fluxo total e a energia cinética média E_1 dos múons produzidos a 12,5 km de altitude. 0,5pt

Solução B.1 (0,5 pt)

$$E_1 = \frac{150 * 0,95 + 255 * 1,5 + 200 * 2 + 100 * 3}{150 + 255 + 200 + 100} = 1,74 GeV.$$

B.2 Calcule a energia cinética média E_2 dos múons gerados a 12,5 km de altitude e detectados em solo. 3,0pt

Solução B.2 (3,0 pt) Para o cálculo de E_2 , precisamos estimar a fração de múons gerados em 12,5 km que conseguem ser detectados em solo. Essa fração é dada por

$$f = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{t}{\gamma T_{1/2}}}. \tag{18}$$

Em que t é o tempo de viagem e γ o fator de Lorentz dos múons medidos por um observador em solo. Como todos os múons considerado viajam praticamente a velocidade da luz, temos que $\Delta t \approx 41,7 \mu s$ para todos os múons considerados.

Para cada energia de múon, precisamos calcular o fator de Lorentz, tempos de meia-vida dilatado $\gamma T_{1/2}$ e respectivo fator de decaimento. Fazendo isso, obtemos a seguinte tabela de valores:

Energia (GeV)	γ	$\gamma T_{1/2}$	f
0,95	9,05	19,9	0,23
1,5	14,3	31,5	0,40
2,0	19,0	41,8	0,50
3,0	28,6	62,9	0,63

Assim, a energia média dos múons detectados em solo deve ser dada por

$$E_1 = \frac{0,23 * 150 * 0,95 + 0,4 * 255 * 1,5 + 0,5 * 200 * 2 + 0,63 * 100 * 3}{0,23 * 150 + 0,4 * 255 + 0,5 * 200 + 0,63 * 100} = 1,92 GeV.$$

Observa-se portanto que os múons de alta energia, devido a efeitos relativísticos, sofrem menos decaimento que os de menor energia. Segue portanto que a energia média dos múons em solo é superior do que a calculada em altas altitudes.

Parte C - Aplicações e detecção no subsolo (3 pontos)

C.1 Múons produzidos com 0,95 GeV poderiam ser usados em estudos de estrutura cristalina de materiais ou da estrutura nuclear? Justifique sua resposta. 2,0pt

Solução C.1 (2,0 pt)

Usando a seguinte relação e resolvendo para o momento, teremos:

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2,$$

em que $p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{K}{c} \sqrt{1 + \frac{2E_0}{K}}$, em que, por sua vez, K é a energia cinética e E_0 é a energia de repouso.

Usando a relação de de Broglie, tem-se:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{K}{c} \sqrt{1 + \frac{2E_0}{K}}} = 1,18 fm$$

Como o comprimento de onda associado aos múons de 0,95 GeV é da ordem da dimensão nuclear, estes poderiam ser usados em experimentos de física nuclear.

C.2 Estime a profundidade que estes múons podem penetrar no solo. Despreze possíveis dispersões. 1,0pt

Solução C.2 (1,0 pt)

Estima-se a taxa perda de energia pelo processo de ionização do múon (I):

$$\kappa = 1,5 g/cm^3 \times 10 MeV/g.cm^2 = 15 MeV/cm$$

A distância D de penetração do múon em solo desconsiderando o decaimento do múon será:

$$D = E/\kappa = 200m$$

Os múons mais energéticos produzidos a 12,5 km de altitude possuem 3 GeV. A distância percorrida por estes múons para que metade deles decaiam, usando o item A.2 para múons de 3 GeV, será:

$$d = D'_{3GeV} - 12,5 \approx 6,2 km$$

Caso não seja adotada a aproximação para γ e v :

$$d = D'_{3GeV} - 12,5 \approx 6,9 km$$

Entretanto, a distância para que haja um decaimento completo dessa população de múons é extremamente grande. Neste caso, a perda por ionização é a mais importante, dessa forma, a distância de penetração dos múons com o espectro apresentado é de até 200 m.